

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ

- στοχαστική διαδικασία: οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X(t) : t \geq 0\}$
- χώρος καταστάσεων: συμβολίζεται με S και δημιουργείται απ' όλες τις πιθανές τιμές της μεταβλητής $X(t)$. Ο χώρος καταστάσεων της διαδικασίας είναι διακριτός αν η τυχαία μεταβλητή $X(t)$ παίρνει διακριτές τιμές.
Η παράμετρος t μεταβάλλεται είτε σε διάστημα $[0, \alpha]$, δηλαδή η $X(t)$ είναι μια στοχαστική διαδικασία σε συνεχή χρόνο, είτε παίρνει διακριτές τιμές $t=0, 1, 2, \dots$, δηλαδή η $X(t)$ είναι μια στοχαστική διαδικασία συμβολίζεται με X_n αντί του $X(t)$.
- μαρκοβιανή ιδιότητα Αν έχουμε διατεταγμένο δείγμα χρονικών στιγμών $t_1 < t_2 < t_3 \dots < t_n < t$ ισχύει $P(X(t)=i | X(t_1)=j_1, X(t_2)=j_2, \dots, X(t_n)=j_n) = P(X(t)=i | X(t_n)=j_n)$ τότε η στοχαστική διαδικασία λέγεται Μαρκοβιανή Στοχαστική Διαδικασία.
Με πιο απλά λόγια, μια στοχαστική διαδικασία ονομάζεται Μαρκοβιανή διαδικασία αν δοθείς της κατάστασης της τη χρονική στιγμή t , η κατάσταση τη χρονική στιγμή s , όπου $s > t$ δεν εξαρτάται από τις καταστάσεις της σε χρονικές στιγμές μικρότερες του t , αν γνωρίζουμε ακριβώς την παρούσα τιμή της διαδικασίας, η μέλλοντική της συμπεριφορά δεν εξαρτάται από τη συμπεριφορά της στο παρελθόν.
- πιθανότητες μεταβάσης Για μια Μαρκοβιανή διαδικασία μπορούμε να γράψουμε $P_{ij}(u, t) = P(X(t)=j | X(u)=i)$, $u < t$, δηλαδή η πιθανότητα τη χρονική στιγμή t να βρίσκεται στην κατάσταση j δεδομένου ότι τη χρονική στιγμή u βρίσκεται στην κατάσταση i .
- στατικές πιθανότητες μεταβάσης Αν η πιθανότητα $P(X(t+u)=j | X(u)=i)$ είναι ανεξάρτητη του u και γράφεται $P_{ij}(t) = P(X(t+u)=j | X(u)=i)$

• ροποχεννήτρια μιας τυχαίας μεταβλητής x με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ ορίζεται να είναι η $m_x(t) = E(e^{tx}) = \int e^{tx} f(x) dx$

Αν υπάρχει η $m_x(t)$ για μια περιοχή του $z=0$, τότε έχει παραγωγούς κάθε τάξης στην περιοχή αυτή. Δηλαδή $\left. \frac{d^r m_x(t)}{dt^r} \right|_{t=0} = E(x^r)$

• πιθανοχεννήτρια μιας τυχαίας μεταβλητής x με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ ορίζεται να είναι: $g_x(t) = E(t^x)$, $|t| < 1$

Αν $\left. \frac{d^r g_x(t)}{dt^r} \right|_{t=1} = E(x(x-1)(x-2)\dots(x-r+1))$

Έτσι ισχύει $g_x(t) = m_x(\ln t)$

* παρατήρηση Η πιθανοχεννήτρια λέγεται και z -μετασχηματισμός

• z -μετασχηματισμός

Έχουμε το σύστημα για τον z -μετασχηματισμό

$$P(t, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(t) z^n, \quad |z| < 1 \quad \text{και έτσι προκύπτει η σχέση:}$$

$$P_n(t) = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n P(t, z)}{dz^n} \right|_{z=0} \quad \text{που είναι η ανάπτυξη Taylor}$$

Στη διαδικασία Poisson, εφαρμόζεται ως εξής

$$z_0 \cdot \frac{dP_0(t)}{dt} + \lambda P_0(t) = 0$$

$$z^1 \cdot \frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda P_1(t) = \lambda P_0(t)$$

$$z^2 \cdot \frac{dP_2(t)}{dt} + \lambda P_2(t) = \lambda P_1(t)$$

⋮

$$z^n \cdot \frac{dP_n(t)}{dt} + \lambda P_n(t) = \lambda P_{n-1}(t)$$

Πολλαπλασιάζουμε κάθε μία από τις παρακάτω σχέσεις με $z^0, z^1, z^2, \dots, z^n$ και αθροίζουμε κατά μέλη κι έτσι έχουμε

$$\frac{\partial P(t, z)}{\partial t} + \lambda P(t, z) - \lambda z P(t, z) (=)$$

$$\frac{\partial P(t, z)}{\partial t} + \lambda(1-z) P(t, z) = 0 \quad (=)$$

$$\frac{\partial P(t, z)}{\partial t} + \lambda(1-z) P(t, z) = 0 \quad (=)$$

$$P(t, z) = C e^{-\lambda(1-z)t}$$

Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες

(α) $P_0(0) = 1$ και (β) $P_j(0) = 0, j \neq 0$

Τότε $\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(0) z^n = 1$ με $P(0, z) = 0$

Άρα $P(t, z) = e^{-\lambda(1-z)t}$ η πιθανογεννήτρια της μορφής $\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(t) z^n$

Επειδή $P(t, z) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} z^n$ τότε η πιθανότητα τη χρονική στιγμή t

να είναι στην κατάσταση n είναι $P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}$

• Μετασχηματισμός Laplace

Έστω μια συνάρτηση $f(x)$ η οποία παίρνει μη μηδενικές τιμές για μη αρνητικές τιμές της μεταβλητής x

Ο μετασχηματισμός Laplace της $f(x)$ ορίζεται να είναι:

$$g(z) = L(f(x)) = \int_0^{+\infty} e^{-zx} f(x) dx, \operatorname{Re}(z) > 0$$

Ιδιότητες μετρίου Laplace

$$(1) f(x) \xrightarrow{L} g(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zx} f(x) dx$$

$$(2) \frac{df(x)}{dx} \xrightarrow{L} -f(0) + zg(z)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-zx} \frac{df(x)}{dx} dx &= e^{-zx} f(x) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(x) d e^{-zx} \\ &= -f(0) + z \int_0^{+\infty} e^{-zx} f(x) dx \\ &= -f(0) + zg(z) \end{aligned}$$

$$(3) \int_0^x f(u) du \xrightarrow{L} \frac{1}{z} g(z)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-zx} \int_0^x f(u) du dx &= \int_0^{+\infty} f(u) \int_u^{+\infty} e^{-zx} dx du = \int_0^{+\infty} f(u) \left(-\frac{1}{z} e^{-zx} \right) \Big|_u^{+\infty} du \\ &= \int_0^{+\infty} f(u) \frac{1}{z} e^{-zu} du = \frac{1}{z} \int_0^{+\infty} e^{-zu} f(u) du = \frac{1}{z} g(z) \end{aligned}$$

(4) Αν η $g(z)$ είναι αναλυτική για $\operatorname{Re}(z) > 0$ και υπάρχει το όριο

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot g(z) \text{ τότε } \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot g(z) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

(5) Αν η $f(x)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X και $h(y)$

είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y όπου X, Y ανεξάρτητες τ.μ.

Ορίσω $T = X + Y$

Αν $f(x) \xrightarrow{L} g(z)$ και $h(y) \xrightarrow{L} c(z)$ τότε ορίσω ως συνέλιξη των X, Y

την

$$m_{X+Y}(t) = \int_0^t f(x) \cdot h(t-x) dx \text{ της οποίας ο μετρίου Laplace είναι } g(z) \cdot c(z)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} \int_0^t f(x) h(t-x) dx dt = \int_0^{+\infty} f(x) \int_x^{+\infty} e^{-zt} h(t-x) dt dx$$

$$= \int_0^{+\infty} f(x) e^{-zx} \int_x^{+\infty} e^{-z(t-x)} h(t-x) dt dx = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-zx} \int_0^{+\infty} e^{-zy} h(y) dy dx$$

$$= \int_0^{+\infty} f(x) e^{-zx} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-zy} h(y) dy = g(z) \cdot c(z)$$

Z-μετασχηματισμοί ακολουθιών και μετασχηματισμοί Laplace συναρτήσεων

Ακολουθία f_n	Z-μετασ/μος	συνάρτηση $f(t)$	μετ/μος Laplace
1	$1/(1-z)$	1	$1/z$
Ax^n	$A/(1-xz)$	$t^{n-1}/(n-1)!$	$1/s^n$
nx^n	$xz/(1-xz)^2$	Ae^{-at}	A/sta
n	$z/(1-z)^2$	te^{-at}	$1/(sta)^2$
$1/n!$	e^z	$\frac{t^n e^{-at}}{n!}$	$1/(sta)^{n+1}$

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ-ΘΑΝΑΤΩΝ

Έστω μια Μαρκοβιανή διαδικασία σε συνεχή χρόνο και $\{X(t): t \geq 0\}$ κι

έχοντας στατικές πιθανότητες μετάβασης, δηλαδή

$P_{ij}(t) = P(X(t+u)=j | X(u)=i)$ και οι αλλαγές στις καταστάσεις της διαδικασίας καθορίζονται από τους εξής κανόνες

(i) Δοθέντος ότι η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση n ($n=0,1,2,\dots$) τη χρονική στιγμή t , η πιθανότητα να βρεθεί στην $n+1$ τη χρονική στιγμή $t+dt$ (να συμβεί Γέννηση) είναι $\lambda_n dt + o(dt)$, $\lambda_n > 0$ (ρυθμός γεννήσεων) (λ_n θετική παράμετρος)
Δηλαδή, $P_{n,n+1} = \lambda_n dt + o(dt)$ με $\lim_{dt \rightarrow 0} o(dt) = 0$

(ii) Δοθέντος ότι η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση n ($n=1,2,\dots$) τη χρονική στιγμή t , η πιθανότητα να βρεθεί στην $n-1$ τη χρονική στιγμή $t+dt$ (να συμβεί Θάνατος) είναι $\mu_n dt + o(dt)$, $\mu_n > 0$ (ρυθμός θανάτων) (μ_n θετική παράμετρος)
Δηλαδή $P_{n,n-1}(dt) = \mu_n dt + o(dt)$ με $\lim_{dt \rightarrow 0} o(dt) = 0$

(iii) Δοθέντος ότι η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση n τη χρονική στιγμή t , η πιθανότητα ο συνολικός αριθμός των γεγονότων (γεννήσεων και θανάτων) που θα συμβούν στο διάστημα $(t, t+dt)$ να είναι μεγαλύτερος του ένα, είναι $o(dt)$. Έστω τώρα:
Δηλαδή, $P_n(t) = (P(X(t)=n | X(0)=i), n \geq 0$

Τελικά έχουμε τον παρακάτω πίνακα που δείχνει τους τρόπους με τους οποίους το σύστημα μπορεί να βρεθεί στην κατάσταση n τη χρονική στιγμή $t+dt$

κατάσταση τη χρονική στιγμή t	γεγονότα στο διάστημα $(t, t+dt)$	πιθανότητες
$n-1$	γέννηση	$P_{n-1}(t) [\lambda_{n-1} dt + o(dt)]$
$n+1$	θάνατος	$P_{n+1}(t) [\mu_{n+1} dt + o(dt)]$
$j (=0,1,\dots)$	πολλαπλά γεγονότα	$P_j(t) o(dt)$
n	κανένα γεγονός	$P_n(t) [1 - \lambda_n dt - \mu_n dt + o(dt)]$

Αν υποθέσουμε ότι η στοχαστική διαδικασία "πέφτει" σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας, δηλαδή υπάρχουν οι οριακές πιθανότητες P_n , $n=0,1,2,\dots$ με $0 \leq P_n \leq 1$ και $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ ισχύουν οι σχέσεις

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P_n \text{ και } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dP_n(t)}{dt} = 0$$

Δηλαδή, με εφαρμογή των 2 παραπάνω τύπων στις σχέσεις (1), (2) έχουμε

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1 \quad (1)'$$

$$(\lambda_n + \mu_n) P_n = \lambda_{n-1} P_{n-1} + \mu_{n+1} P_{n+1}, \quad n > 0 \quad (2)'$$

Από την (1) έχουμε $P_1 = \frac{\lambda_0 P_0}{\mu_1}$ και αντικαθιστώντας στην (2)'

$$\text{για } n=1: P_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} P_0$$

Έτσι επαγωγικά προκύπτει $P_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} P_0, \quad n=1,2,\dots$

Λόγω της σχέσης $\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1$ έχουμε:

$$P_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} P_0 = 1 \Rightarrow P_0 = \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} \right]^{-1}$$

ΚΑΘΑΡΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ (ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ POISSON)

Έστω η στοχαστική διαδικασία $\{X(t): t \geq 0\}$ κι έχουμε $\lambda_n = \lambda$ και $\mu_n = 0, \quad n=0,1,2,\dots$ κι ακόμα $P_N(0)=1, P_i(0)=0, i \neq N$

Έτσι οι διαφορικές εξισώσεις (1), (2) γίνονται

$$\frac{dP_n(t)}{dt} + \lambda P_n(t) = \lambda P_{n-1}(t) \quad (\alpha), \quad n = N+1, N+2, \dots$$

$$\frac{dP_N(t)}{dt} + \lambda P_N(t) = 0 \quad (\beta)$$

Από την (β) έχουμε $\frac{dP_N(t)}{dt} = -\lambda t \Rightarrow P_N(t) = k e^{-\lambda t}$

Επειδή $P_N(0)=1$, τότε $P_N(0) = k e^{-\lambda \cdot 0} \Rightarrow k=1$

Άρα $P_N(t) = e^{-\lambda t}$

Για $n=N+1$, από την (α) έχουμε:

$$\frac{dP_{N+1}(t)}{dt} + \lambda P_{N+1}(t) = \lambda P_N(t) \Rightarrow \frac{dP_{N+1}(t)}{dt} + \lambda P_{N+1}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \Rightarrow P_{N+1}(t) = \frac{\lambda t e^{-\lambda t}}{1!}$$

Επαγωγικά προκύπτει ότι $P_{N+n}(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}, n=0,1,2,\dots$

Ορίσω $N(t)$: αριθμός γεννήσεων σε χρονικό διάστημα μήκους t

Τότε: $P(X(t_0+\tau)=j | X(t_0)=i) = P(X(t_0+\tau)-X(t_0)=j-i)$

$$= P(N(t)=j-i) = \frac{(\lambda \tau)^{j-i} e^{-\lambda \tau}}{(j-i)!}, n=0,1,2,\dots$$

Έτσι η κατανομή της Μαρκοβιανής διαδικασίας $\{N(t): t \geq 0\}$ δίνεται

από τον τύπο:

$$p_n(t) = P(N(t)=n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}, n=0,1,2,\dots$$

Ακόμα ορίσω t_n : τη χρονική στιγμή της n -οστής γεννήσεως.

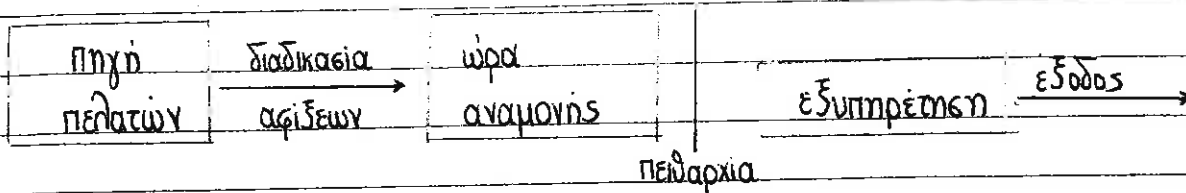
Έστω επίσης $T_n = t_{n+1} - t_n, n=0,1,2,\dots$ όπου T_n : η τυχαία μεταβλητή που παριστάει τη χρονική απόσταση μεταξύ της n -οστής και της $(n+1)$ -οστής γεννήσεως.

Τότε $P(T_n > \tau) = P(X(t_n+\tau) - X(t_n) = 0) = P(N(\tau) = 0) = e^{-\lambda \tau}$

δηλαδή $P(T_n < \tau) = 1 - e^{-\lambda \tau}$

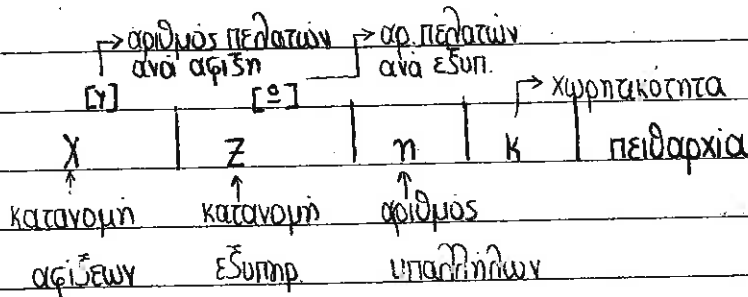
Άρα $T_n \sim \text{Exp}(\lambda)$ και οι τυχαίες μεταβλητές $T_0, T_1, \dots$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους

ΤΡΙΤΗ 3/3/2015 2^ο



- (1) χωρητικότητα χώρου αναμονής
- (2) τρόπος αρίθρυν πελατών
- (3) αριθμός πελατών ανά αρίθρυν
- (4) αριθμός υπαλλήλων εξυπηρέτησης
- (5) τρόπο εξυπηρέτησης πελατών
- (6) αριθμός πελατών ανά εξυπηρέτηση
- (7) πείραρχια ουράς FCFs (FIFO) (first in first out)

LCLS



ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΗΣ M|M|1|∞ FCFs

Έχεται ένας ένας με κατανομή Poisson και εξυπηρετείται με εκθετική κατανομή

$$P(\lambda) \rightarrow \text{ο.ο.ο. } \Gamma(1) \text{ Exp}(\mu)$$

$f(t)$: ο αριθμός πελατών στο σύστημα μετά από χρόνο t από την αρχή λειτουργίας

$\{f(t), t \geq 0\}$ το t συνεχής μεταβλητή

$$P_n(t) = P(f(t)=n | f(0)=0)$$

$$P_{n+1}(dt) = \lambda dt + \dots + 0(dt) \text{ για να έρδει ένας πελάτης}$$

$$P_{n-1}(dt) = \mu dt + \dots + 0(dt) \text{ για να φύγει}$$

$$P_j(dt) = 0 \text{ } j \neq n+1, n-1$$

κατανομές με
ιδιότητα αμνησίας

$M|_{M|1}|_{\infty} \rightarrow$ διαδικασία γεννήσεων-θανάτων

$$\lambda_n = \lambda \quad P_0(0) = 1, P_i(0) = 0, i = 1, 2, \dots$$

$$\mu_n = \mu$$

Εξισώσεις διαφορών

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP_0(t)}{dt} + \lambda P_0(t) = \mu P_1(t) \\ \dots \\ \frac{dP_n(t)}{dt} + (\lambda + \mu) P_n(t) = \mu P_{n+1}(t) + \lambda P_{n-1}(t), n = 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

$$P_n(t) \xrightarrow{L} \Pi_n(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} P_n(t) dt, \operatorname{Re}(z) > 0$$

$$f(x) \xrightarrow{L} g(z)$$

$$\frac{df(x)}{dx} \xrightarrow{L} -f(0) + zg(z)$$

Από μετασχηματισμούς Laplace έχουμε:

$$P_0(0) + z \Pi_0(z) + \lambda \Pi_0(z) = \mu \Pi_1(z)$$

$$P_n(0) + z \Pi_n(z) + (\lambda + \mu) \Pi_n(z) = \mu \Pi_{n+1}(z) + \lambda \Pi_{n-1}(z) \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(\lambda + z) \Pi_0(z) = \mu \Pi_1(z) + 1$$

Εξίσω. διαφ. 2^{ου} βαθμού

$$(z + \lambda + \mu) \Pi_n(z) = \mu \Pi_{n+1}(z) + \lambda \Pi_{n-1}(z) \quad n = 1, 2, \dots$$

ομογενής

$$\text{Άρα η λύση της είναι: } \Pi_n(z) = A \alpha^n(z) + B \beta^n(z) \quad +\infty$$

$$\text{με } \alpha(z), \beta(z) \text{ λύσεις του } \mu x^2 - (z + \lambda + \mu)x + \lambda \text{ και } \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(t) = 1$$

$$A \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n(z) + B \sum_{n=0}^{+\infty} \beta^n(z) = \frac{1}{z} \quad \operatorname{Re}(z) > 0$$



Αφού το δεύτερο μέλος συγκλίνει θα πρέπει να συγκλίνει και το άλλο μέλος

Θα εξετάσουμε αν $\alpha(z), \beta(z) < 1$

ΘΕΩΡΗΜΑ ROURCHE Έστω ότι έχουμε δύο μιγαδικές συναρτήσεις $f(z)$ και $g(z)$ που είναι αναλυτικές μέσα και πάνω σε μια κλειστή καμπύλη G και αν $|f(z)| < |g(z)|$ στο G τότε οι $g(z)$ και $f(z) \pm g(z)$ έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών μέσα στο G

$$f(x) = \mu x^2 + \lambda$$

$$g(x) = (z + \lambda + \mu)x$$

$$C : \{x : |x| = 1\} \text{ (ερείνα που είναι στο μοναδιαίο κύκλο)}$$

$$|f(x)| \leq \mu |x|^2 + \lambda \leq \mu + \lambda$$

$$|g(x)| = |z + \lambda + \mu| |x| \leq |z + \lambda + \mu| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z) + \lambda + \mu)^2 + (\operatorname{Im}(z))^2}$$

$$g(x) = (z + \lambda + \mu)x \text{ (οι ρίζες του παρόλου αυτής της μορφής θα είναι)}$$

$$a(z) > 1 > b(z)$$

(*)

$$\frac{1}{z} = B \sum_{n=0}^{+\infty} b^n(z) = B \frac{1}{1-b(z)} \text{ αφού } b(z) < 1$$

$$B = \frac{1-b(z)}{z} \text{ άρα}$$

$$\Gamma_n(z) = \frac{1-b(z)}{z} b^n(z)$$

μετρώς Laplace $P_n(t)$

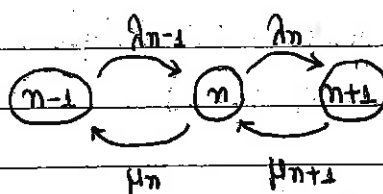
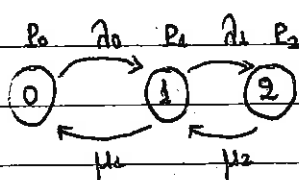
ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΑΝΑΜΟΝΗΣ ΤΩΝ ΠΕΛΑΤΩΝ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ ΤΟΥ ΣΥΣΤ ΣΕ Σ.Ι.

Ορισμένες πιθανότητες για τη διαδικασία γεννήσεων - θανάτων (σε Σ.Ι.)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P_n$$

$$P_n = \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n} P_0 \Rightarrow P_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \dots \mu_i} \right)^{-1}$$



$$\mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0$$

$$\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 = (\lambda_1 + \mu_1) P_1$$

(ότι μπαίνει βγαίνει)

$$P_n = \frac{\lambda \dots \lambda}{\mu \dots \mu} P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

$P_n = \rho^n P_0$, $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ (μόνο όταν έρχονται λιγότεροι πελάτες από αυτούς που μπορούν να εξυπηρετηθούν)

$$P_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\lambda \dots \lambda}{\mu \dots \mu}\right)^{-1} = \left(1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i\right)^{-1} = \left(1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \rho^i\right)^{-1} \Rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{+\infty} \rho^i} \quad (*)$$

- αν $\rho \geq 1$ τότε $P_i = 0$
- αν $\rho < 1$ τότε $P_0 = 1 - \rho$, $P_i = (1 - \rho)\rho^i$

$$\rho: \text{πυκνότητα κυκλοφορίας} = \frac{E(\text{χρόνος εξυπηρέτησης})}{E(\text{χρόνος μεταξύ δύο διαδ. αφίξεων})} = \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\text{Άρα } P_n = \begin{cases} (1 - \rho)\rho^n, & \rho < 1 \\ 0, & \rho \geq 1 \end{cases}$$

μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα

$$L = \sum_{n=0}^{+\infty} n P_n = \sum_{n=0}^{+\infty} n (1 - \rho)\rho^n = (1 - \rho)\rho \sum_{n=0}^{+\infty} n \rho^{n-1} = (1 - \rho)\rho \frac{d}{d\rho} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n \right)$$

$$= (1 - \rho)\rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{1 - \rho} \right) = \frac{(1 - \rho)\rho}{(1 - \rho)^2} = \frac{\rho}{1 - \rho}, \quad \rho < 1$$

μέσος αριθμός πελατών στην ουρά

$$L_q = \sum_{n=0}^{+\infty} n P_{n+1} = (1 - \rho)\rho^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n \rho^{n-1} = (1 - \rho)\rho^2 \frac{d}{d\rho} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n \right) = \frac{(1 - \rho)\rho^2}{(1 - \rho)^2} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}, \quad \rho < 1$$

Αν $L - L_q = \rho$ (μέτρα αριθμό πελατών που θα έρθουν στην διάρκεια μια εξυπηρέτησης)

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΑΝΑΜΟΝΗΣ ΤΩΝ ΠΕΛΑΤΩΝ ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

W_n : η τ.μ. που περιγράφει το χρόνο αναμονής του n -οστού πελάτη στο σύστημα
FIFO

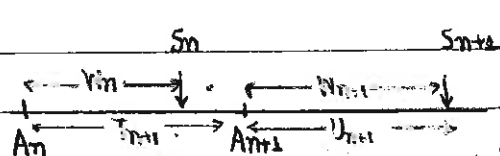
$f_n(w)$ σ.π.π. ($f_n(w)dw = P(W_n < w < w+dw)$)

Θα βρω μια αναδρομική σχέση για την σ.π.π. Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(Α) όταν έρθει ο $n+1$ πελάτης ο n πελάτης να έχει φύγει

A_i : η χρονική στιγμή άφιξης του i -πελάτη

S_i : η χρονική στιγμή αναχώρησης του i -πελάτη



$$T_{n+1} \sim \text{Exp}(\lambda)$$

U_{n+1} ο χρόνος εξυπηρέτησης του $n+1$ πελάτη

$$U_{n+1} \sim \text{Exp}(\mu)$$

W_n : χρόνος αναμονής n -πελάτη

$$U_{n+1} = W_{n+1}$$

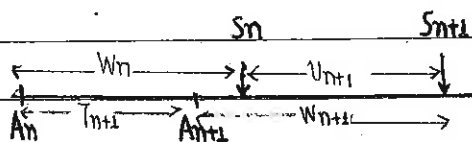
$$W_n < T_{n+1}$$

$$P(W < W_{n+1} < w+dw) = P(W < U_{n+1} < w+dw, 0 < T_{n+1} < \infty, W_n < T_{n+1})$$

$$= P(W < U_{n+1} < w+dw) \cdot P(0 < T_{n+1} < \infty, W_n < T_{n+1})$$

$$= \mu \cdot e^{-\mu w} \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t f_n(x) dx dt$$

(Β) όταν έρθει ο $n+1$ πελάτης ο n -οστός δεν έχει φύγει ακόμα



$$T_{n+1} \sim \text{Exp}(\lambda)$$

$$U_{n+1} \sim \text{Exp}(\mu)$$

$$U_{n+1} < W_{n+1}$$

$$W_n + U_{n+1} = T_{n+1} + W_{n+1}$$

$$P(W < W_{n+1} < W + dw) = P(0 < T_{n+1} < \infty, 0 < U_{n+1} < \infty, T_{n+1} - U_{n+1} + W < W_n < T_{n+1} - U_{n+1} + W + dw)$$

$$= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} \mu e^{-\mu u} f_n(t-u+W) dw dt$$

αφού $W_{n+1} = W_n - T_{n+1} + U_{n+1} \Rightarrow W < W_n - T_{n+1} + U_{n+1} < W + dw$

Άρα η πιθανότητα που ζητώ:

$$f_{n+1}(w) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} \mu e^{-\mu u} f_n(t-u+w) dw + \mu \lambda e^{-\mu w} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \int_0^t f_n(x) dx dt$$

$$f_1(w) = \mu e^{-\mu w} \sim \text{Exp}(\mu)$$

ΑΣΚΗΣΗ Σε ένα M/M/1/∞ σύστημα να βρείτε την κατανομή του αριθμού των πελατών βρίσκοντας βρίσκουν τον ίδιο πελάτη να εξυπηρετούνται

$Y(x)$: αριθμός αφίξεων κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος x

$X \sim \text{Exp}(\mu)$

$Y(x) \sim P(\lambda x)$

$$P(Y(x)=n) = \int_0^{\infty} P(Y(x)=n | X=x) \mu e^{-\mu x} dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda x} (\lambda x)^n}{n!} \mu e^{-\mu x} dx \quad [\text{ΓΑΜΜΑ}]$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{(\lambda x)^n \cdot \mu}{n!} e^{-(\lambda+\mu)x} dx = \frac{\mu \lambda^n}{(\lambda+\mu)^{n+1}} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda+\mu)^{n+1} x^n e^{-(\lambda+\mu)x}}{n!} dx$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)^n \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)^n \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$\Gamma \sim \frac{x^{\alpha-1} e^{-x} \cdot b^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \quad \begin{matrix} \alpha = n+1 \\ \delta = \lambda+\mu \\ \Gamma(n+1) = n! \end{matrix}$$

μέσος αριθμός πελατών: $E(Y(x)) = E(E(Y(x)|X)) = E(\lambda X) = \lambda E(X) = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$

$$E(x) = \frac{1}{\mu}$$

ΑΣΚΗΣΗ Ένα M/M/1/∞ σύστημα όπου ο υπάλληλος εξυπηρετεί με διπλάσια ταχύτητα όταν ο αριθμός των πελατών στο σύστημα υπερβεί τους k .
Να βρεθεί η οριακή κατανομή

$$\lambda_n = \lambda \quad \mu_n = \begin{cases} \mu, & n \leq k \\ 2\mu, & n > k \end{cases}$$

$$P_n = \begin{cases} P_0 \cdot \rho^n, & n \leq k \\ P_0 \cdot \frac{\rho^n}{2^{n-k}}, & n > k \end{cases} \quad P_0 = \begin{cases} \left(\frac{1-\rho^{k+1}}{1-\rho} + \frac{\rho^{k+1}}{2-\rho} \right)^{-1}, & \rho \neq 1 \\ (k+2)^{-1}, & \rho = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{συνηθισ} \\ \text{για } \rho < 2 \end{array}$$

ΤΕΡΜΑ 17/3/2016 3^ο

w : χρόνος αναμονής του τυχαίου πελάτη σε σταθερή ισορροπία $f(w)dw = P(w < w + dw)$

α' τρόπος

$$f_{n+1}(w) = \underbrace{\mu e^{-\mu w} \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t f_n(x) dx dt}_{A} + \underbrace{\int_0^w \lambda e^{-\lambda t} \int_0^w \mu e^{-\mu u} f_n(t+w-u) du dt}_{B}, \quad f(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(w)$$

Μετασχηματισμός Laplace:

$$\bullet \quad g(z) = \int_0^{\infty} e^{-zw} f(w) dw$$

$$I(A) = \int_0^{\infty} e^{-zw} \mu e^{-\mu w} \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t f(x) dx dt dw$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-zw} \mu e^{-\mu w} \int_0^{\infty} f(x) \int_x^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt dx dw$$

$$= \int_0^{\infty} \mu e^{-(z+\mu)w} \int_0^{\infty} f(x) (-e^{-\lambda t} \Big|_x^{\infty}) dx dw = \frac{\mu}{z+\mu} \int_0^{\infty} f(x) e^{-\lambda x} dx = \frac{\mu}{z+\mu} g(\lambda)$$

$$\bullet \quad I(B) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} e^{-zw} \int_0^w \mu e^{-\mu u} f(t+w-u) du dw dt$$

$$= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} \mu e^{-\mu u} \int_u^{\infty} e^{-zw} f(t+w-u) dw du dt$$

$$= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} \mu e^{-\mu u} e^{-zu} \int_u^{\infty} e^{-z(w-u)} f(t+w-u) dw du dt$$

$$= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} \mu e^{-(\mu+z)u} du e^{zt} \int_0^{\infty} e^{-z(x+t)} f(t+x) dx dt$$

$$= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{\mu}{z+\mu} e^{zt} \int_t^{\infty} e^{-zy} f(y) dy = \frac{\lambda \mu}{z+\mu} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-z)t} \int_t^{\infty} e^{-zy} f(y) dy$$

$$= \frac{\lambda \mu}{z+\mu} \int_0^{\infty} e^{-zy} f(y) \int_0^y e^{-(\lambda-z)t} dt dy$$

$$= \frac{\lambda \mu}{z+\mu} \int_0^{\infty} e^{-zy} f(y) \left(-\frac{1}{\lambda-z} e^{-(\lambda-z)t} \right) \Big|_0^y dy$$

$$= \frac{\lambda \mu}{z+\mu} \int_0^{\infty} e^{-zy} f(y) \frac{1}{\lambda-z} (1 - e^{-(\lambda-z)y}) dy$$

$$= \frac{\lambda \mu}{(z+\mu)(\lambda-\mu)} \left(\int_0^{\infty} e^{-zy} f(y) dy - \int_0^{\infty} e^{-\lambda y} f(y) dy \right) = \frac{\lambda \mu}{(z+\mu)(\lambda-\mu)} (g(z) - g(\lambda))$$

Μετ/μος Laplace και στα δύο μέρη

$$g(z) = \frac{\mu}{z+\mu} g(\lambda) + \frac{\lambda\mu}{(z+\mu)(\lambda-z)} (g(z)-g(\lambda))$$

$$g(z) = \frac{\frac{\mu}{z+\mu} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda-z}\right) g(\lambda)}{1 - \frac{\lambda\mu}{(z+\mu)(\lambda-z)}} = \frac{\mu}{z-(\lambda-\mu)} g(\lambda) \Rightarrow$$

$$g(z) = \frac{\mu}{z-(\lambda-\mu)} g(\lambda) \text{ και } g(0)=1. \text{ Άρα}$$

$$1 = \frac{\mu}{-(\lambda-\mu)} g(\lambda) \Rightarrow g(\lambda) = 1-p$$

$$\text{Άρα } g(z) = \frac{\mu(1-p)}{z-(\lambda-\mu)} = \frac{\mu(1-p)}{z+\mu(1-p)} \quad \left(\mathcal{L}(ae^{-at}) = \frac{a}{z+a} \right)$$

Άρα $f(w) = \mu(1-p)e^{-\mu(1-p)w}$, $w \geq 0$ ακολουθεί εκθετική

2' τρόπος Ψάχνω $P(w < w < w+dw)$

$$f(w)dw = P(w < w < w+dw) = P(w < w < w+dw \mid \text{να βρω 0 πελάτες στο } (S)) \\ + P(w < w < w+dw \mid \text{να βρω 1 πελάτη στο } (S)) \dots$$

$$= \overset{\text{χρον εξυ (εκθετική)}}{\mu e^{-\mu w}} P(\text{να βρω 0 πελ στο } (S)) + \underset{1!}{\mu^2 w e^{-\mu w}} P(1 \text{ πελάτη})$$

$$* \left(\begin{array}{l} X_i \sim \text{Exp}(\mu), X_1 + \dots + X_n \sim G(n, \frac{1}{\mu}) \\ X \sim G(\alpha, \beta), f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \end{array} \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu^{i+1} w^i e^{-\mu w}}{i!} dw \cdot p^i (1-p) \Rightarrow$$

$$f(w) = \mu e^{-\mu w} (1-p) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mu w p)^i}{i!} = \mu e^{-\mu w} (1-p) e^{\mu p w} = (1-p) \mu e^{-\mu(1-p)w}$$

- μέσος χρόνος παραμονής στο (2) και μέσος χρόνος παρ στην ουρά

$$E(w) = \frac{1}{\mu(1-p)} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$E(w_q) = E(w) - \frac{1}{\mu}$$

$$E(w_q) = E(w) - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu(1-p)} - \frac{1}{\mu} = \frac{p}{\mu(1-p)} \quad (\text{χρόνος αναμονής στην ουρά})$$

- μέσος αριθμός πελατών στο (2)

$$L = \frac{p}{1-p} = \frac{\lambda}{\mu(1-p)}, \quad E(w) = \frac{1}{\mu(1-p)}$$

$$\left. \begin{aligned} L &= \lambda E(w) \quad (\text{μέσος αρ. πελ σχετίζεται με το μέσο χρ παραμονής στο (2)}) \\ L_q &= \lambda E(w_q) \quad (L_q = \frac{p^2}{1-p}) \quad (\text{μέσος αρ. πελ στην ουρά}) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Formula} \\ \text{Little} \end{array}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ Σε ένα συστήριου ελέγχου χωρίς ραντεβού. Ο ρυθμός άφιξης έχει υπολογιστεί 2 αυτοκίνητα την ώρα και ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι 3 πελάτες την ώρα. Η εταιρία ενδιαφέρεται για την αγορά ενός νέου μοντέλου ηλεκτρονικού ελέγχου. Με τη χρήση του ο χρόνος ελέγχου για κάθε αυτοκίνητο μειώνεται σε 15 λεπτά (αυτοκ. θέλουμε να δούμε τις διαφορές στα χαρακτηρ. μέγεθι του συστήματος πριν και μετά [$\lambda=2, \mu=3$ (πριν), $\lambda=2, \mu=4$ (μετά)])

ΠΡΙΝ

$$E(w) = \frac{1}{\mu-\lambda} = 1 \text{ ώρα}$$

$$L = \lambda E(w) = 2 \text{ ώρες}$$

$$E(w_q) = E(w) - \frac{1}{\mu} = \frac{2}{3} \text{ ώρες}$$

$$L_q = \lambda E(w_q) = \frac{4}{3}$$

ΜΕΤΑ

$$E(w) = \frac{1}{2}$$

$$L = 1$$

$$E(w_q) = \frac{1}{4}$$

$$L_q = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Ποσοστό χρόνου που δεν εξυπηρετεί (ο πελάτες στο (Σ)): $1-p$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Σ' ένα σταθμό διοδίων τα αυτοκ. περνούν ευμεγέθως με την κατανομή Poisson με μέση τιμή 12 αυτοκ/ώρα. Ο χρόνος εξυπ. ακολουθεί εκθετική με μέση τιμή 2. Ποια η πιθανότητα να βρει κάποιος αυτοκ. το σταθμό διοδίων κατειλημμένο. Ποιο είναι το μέσο μήκος της ουράς όταν υπάρχει ουρά. Είναι πολιτική της εταιρίας να διαθέτει επιπλέον υπάλληλο όταν ένα αυτοκ. χρειαστεί να περιμένει πάνω από 3 λεπτά. Πόσο πρέπει να αυξηθεί η μέση τιμή των αμοιβών να διατεθεί επιπλέον υπάλληλος.

$$\lambda = 12 \quad \mu = 30 \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

• $P(x > 0) = 1 - P(x = 0) = p$ με $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ $\rightarrow$ αρ. αυτ. στην ουρά

• $L_q = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{P_{n+1}}{\sum_{n=0}^{\infty} P_n} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n P_{n+1}}{\sum_{n=0}^{\infty} P_n} = \frac{L_q}{\sum_{n=0}^{\infty} P_n} = \frac{p^2}{1-p} = \frac{p^2}{1-p} = \frac{1}{1-p}$

$\downarrow$
μήκος ουράς

$\downarrow$
 $P(\text{να } \text{ουρά} \text{ μεγέθους } n \text{ υπάρχει ουρά})$

• $E(w_q) = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} > 3$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ένας φοιτητής κάνει μικροδουλείες για να συμπληρώσει το εισόδημά του. Οι αιτήσεις έρχονται κατά μέσο όρο κάθε 5 μέρες και ο χρόνος ανάμεσά τους είναι εκθετικός με με.τ. 4 ημέρες. Ποια η πιθανότητα να μείνει χωρίς δουλειά. Αν ο φοιτητής 50€/δουλειά ποιο το μέσο μηνιαίο εισόδημά του. Αν στο τέλος του μήνα αποφασίσει να δώσει αλλιώς τις εκφεμείς δουλείες με 40€/μία πόσα χρήματα κατά μέσο όρο θα πληρώσει.

$$\lambda = \frac{1}{5} \text{ και } \mu = \frac{1}{4}$$

$$\bullet P_0 = (1-p) = 1 - \frac{4}{5}$$

$$\bullet 50 \cdot \mu \cdot \frac{1}{30} = 50 \cdot \frac{30}{4}$$

$$\bullet 40 \cdot L_q = 40 \cdot \frac{p^2}{1-p}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ένα βενζιναδίκιο με super βεντίνη η μέση τιμή του χρόν. εξυπηρ. ~ εκθ.

Η διαδικασία αρίθμηση Poisson με μέση τιμή λ αυτοκίνητα / ώρα. Το κόστος

αναμονής στο βενζιναδίκιο είναι k_1 χρηματικές μονάδες αυτοκ/ώρα. Το κόστος

του αυτοκ. που εξυπηρ. είναι $\mu \cdot k_2$ χρημ. μονάδες / ώρα. Να προσδιορ. ο μέσος χρόνος

εξυπηρ. που ελαχιστοποιεί το συνολικό ωριαίο κόστος.

→ αυτο/ανα ώρα

$$\text{συνολικό κόστος: } K(\mu) = k_1 L + \mu k_2 = \frac{\lambda k_1}{\mu - \lambda} + \mu k_2$$

$$\frac{\partial K(\mu)}{\partial \mu} = \frac{-\lambda k_1}{(\mu - \lambda)^2} + k_2 = 0$$

$$\frac{(\mu - \lambda)^2}{k_2} = \frac{\lambda k_1}{k_2} \Rightarrow \mu = \lambda + \sqrt{\frac{\lambda k_1}{k_2}}, \quad \mu_2 = \lambda - \sqrt{\frac{\lambda k_1}{k_2}}, \quad \mu > \lambda$$

$$\frac{\partial^2 K(\mu)}{\partial \mu^2} = \frac{2\lambda k_1}{(\mu - \lambda)^3} > 0$$

ΧΡΟΝΟΣ ΑΠΑΣΧΟΛΗΣΗΣ

T : χρόνος συνεχούς απασχόλησης υπαλλήλου

$$K(t)dt = P(t < T < t+dt)$$

- (1) Το T αρχίζει με έναν πελάτη
- (2) Ο αριθμός πελατών δεν γίνεται ποτέ μηδέν μέσα στο T
- (3) Λίγο πριν τελειώσει το T έχουμε ένα μόνο πελάτη στο σύστημα

Ορίσω $f(t)$ ο αριθμός πελατών στο σύστημα μέσα στο χρονικό διάστημα T

$$q_n(t) = P(f(t) = n | f(0) = 1)$$

Ισχύει:

$$q_0(0) = 0, q_1(0) = 1, \dots, q_n(0) = 0$$

$$K(t)dt = P(t < T < t+dt) = q_1(t)(\mu dt + o(dt))$$

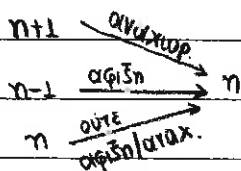
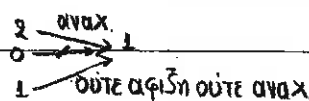
$$K(t) = q_1(t)\mu$$

Αναδρομικά έχουμε:

$$q_0(t+dt) = q_1(t)(\mu dt + o(dt)) + q_0(t)$$



$$q_1(t+dt) = q_2(t)(\mu dt + o(dt)) + q_1(t)(1 - (\lambda + \mu)dt + o(dt))$$



$$q_n(t+dt) = q_{n+1}(t)(\mu dt + o(dt)) + q_{n-1}(t)(\lambda dt + o(dt)) + q_n(t)(1 - (\lambda + \mu)dt + o(dt))$$

Έχουμε: $\frac{dq_0(t)}{dt} = \mu q_1(t)$, $\frac{dq_1(t)}{dt} + (\lambda + \mu)q_1(t) = \mu q_2(t)$

$$\frac{dq_n(t)}{dt} + (\lambda + \mu)q_n(t) = \lambda q_{n-1}(t) + \mu q_{n+1}(t)$$

Με μετριο Laplace έχουμε:

$$q_n(t) \xrightarrow{L} q_n^*(z)$$

$$- q_0'(t) + z q_0^*(z) = \mu q_1^*(z)$$

$$- q_1'(t) + z q_1^*(z) + (\lambda + \mu) q_1^*(z) = \mu q_2^*(z) \quad \Rightarrow$$

$$- q_n'(t) + z q_n^*(z) + (\lambda + \mu) q_n^*(z) = \lambda q_{n-1}^*(z) + \mu q_{n+1}^*(z)$$

$$z q_0^*(z) = \mu q_1^*(z)$$

$$(z + \lambda + \mu) q_1^*(z) = \mu q_2^*(z) + 1$$

$$(z + \lambda + \mu) q_n^*(z) = \mu q_{n+1}^*(z) + \lambda q_{n-1}^*(z)$$

• Το χαρακτη. πολυνο: $\mu x^2 - (z + \lambda + \mu)x + \lambda$

$$\alpha(z) \quad \beta(z) \quad \text{και} \quad \alpha(z) > 1 > \beta(z)$$

$$\begin{cases} q_n^*(z) = E \alpha^n(z) + F \beta^n(z) \\ q_n^*(z) = F \beta^n(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (z + \lambda + \mu) q_1^*(z) = \mu q_2^*(z) + 1 \\ (z + \lambda + \mu) F \beta(z) = \mu F \beta^2(z) + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (z + \lambda + \mu) q_1^*(z) = \mu q_2^*(z) + 1 \\ (z + \lambda + \mu) F \beta(z) = \mu F \beta^2(z) + 1 \end{cases}$$

$$F = \frac{-1}{\mu \beta^2(z) - (z + \lambda + \mu)\beta(z)} = \frac{-1}{-\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Άρα } q_n^*(z) = \frac{1}{\lambda} \beta^n(z)$$

$$K(t) = \mu q_1(t)$$

$$\text{Επομένως ο μετριο Laplace: } K^*(z) = \mu q_1^*(z) = \frac{\mu}{\lambda} \beta(z) = \frac{\beta(z)}{\rho}$$

$$K^*(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} K(t) dt$$

$$\frac{dK^*(z)}{dz} = \int_0^{\infty} -t e^{-zt} K(t) dt \quad \text{και} \quad \left. \frac{dK^*(z)}{dz} \right|_{z=0} = - \int_0^{\infty} t K(t) dt = -E(T)$$

$$E(T) = - \left. \frac{dK^*(z)}{dz} \right|_{z=0} = - \frac{1}{\rho} \left. \frac{d\beta(z)}{dz} \right|_{z=0} = - \frac{1}{\rho} \frac{d}{dz} \left(\frac{(z + \lambda + \mu) - \sqrt{(z + \lambda + \mu)^2 - \eta \lambda \mu}}{2\mu} \right) \Big|_{z=0}$$

→ μέσος χρόνος συνεχούς απασχόλησης του υπαλλήλου

ΑΣΚΗΣΗ

Στο τηλεφ. κέντρο εξυπ. πελατών μιας εταιρίας δουλεύει ένας μόνο τηλεφωνητής. Εκτός από την γραμμή του πελάτη που εξυπν. η εταιρία έχει δύο ακόμα γραμμές αναμονής για πελάτες που αναμένουν να εξυπν. μέχρι να ελευθ. ο τηλεφωνητής. Σε περίπτωση που και οι 3 τήλ. γραμμές είναι απασχ. οποιοδήποτε πελάτης παίρνει σήμα κατελείμμενο και φεύγει από το (Σ). Όμως και οι πελάτες σε αναμονή έχουν περιορ. αναμονή. Κάθε πελάτης σε αναμονή είναι διατεθειμένος να περιμένει ένα εκθ. καταγενημένο τ. χρόνο με $\mu = 15$ λεπτά. Αν δεν εξυπν. σε αυτό το χρόνο εγκαταλείπει το κέντρο για πάντα χωρίς να εξυπηρετηθεί. Οι πελάτες τήλ. τυχαία με Poisson με ρυθμό 10 πελάτες /ώρα, ή διάρκεια των τήλ. συνδιαλ. ακολουθεί εκθ. με 10 λεπτά. Ορίστε μια ακόλ. γεννήσεων - θανάτου για να μοντελογ. τον αριθμό πελ. στο (Σ). Βρείτε τις ορισκές πιθανότητες και να βρείτε ποιος είναι ο πραγματικός μέσος ρυθμός των εισόδων στο (Σ).

ΠΡΩΤΗ 24/3/2015 40

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΑΝΑΧΩΡΗΣΕΩΝ

Έστω S_1, S_2 οι χρονικές στιγμές δύο διαδοχικών αναχωρήσεων πελατών

$$u = S_2 - S_1$$

$$h(x)dx = P(x < u < x+dx)$$

1) Το S_1 έχει $n \geq 2$ πελάτες

2) Το S_1 έχει $n=1$ πελάτη

$$h(x)dx = P(x < u < x+dx) = P(x < u < x+dx \mid \text{πριν } S_1 \text{ έχουμε 2 ή περισσ. πελάτες}) \cdot P(2 \text{ ή περισσ. πελ.}) \\ + P(x < u < x+dx \mid \text{πριν } S_1 \text{ 1 πελάτης}) \cdot P(1 \text{ πελάτης})$$

$$= \mu e^{-\mu x} P\left(\begin{array}{c} 2 \text{ ή περισσ.} \\ \text{πριν το } S_1 \end{array}\right) + \int_0^x \lambda e^{-\lambda z} \underbrace{\mu e^{-\mu(x-z)}}_{\substack{\text{έρχονται στο } \Sigma \\ \text{εξυπν.}}} dz P(1 \text{ πελ. πριν το } S_1) \quad (*)$$

(γεννήσεις)

ΣΥΝΟΠΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΟ ΜΙΜΗΛΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

ΜΙΜΗΛΟ FCFS (πειθαρχία της ουράς)

(1) $P_n(t)$ χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό Laplace

$$P_n(z) = \frac{1 - \beta(z)}{\beta(z)}$$

όπου $\beta(z)$ η μικρότερη ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\mu x^2 - (z + \lambda + \mu)x + \lambda = 0$

$$P_n(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} P_n(t) dt$$

(2) Οριακές πιθανότητες $\lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P_n$, $P_n = \begin{cases} (1-p)p^n, & p < 1 \\ 0, & p \geq 1 \end{cases}$, $p = \lambda/\mu$

με μέσο αριθμό πελάτων στην ουρά

$$L = \frac{p}{1-p}, \quad L_q = \frac{p^2}{1-p}$$

(3) χρόνος αναμονής του n -ιστού πελάτη στο σύστημα. Έστω w

$$f_{n+1}(w) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} \mu e^{-\mu u} f_n(t-u+w) + \mu \lambda e^{-\mu w} \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t f_n(x) dx dt$$

$$f_1(w) = \mu e^{-\mu w}$$

(4) οριακή κατανομή του χρόνου αναμονής του τυχαίου πελάτη

$$f(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(w), \quad w \sim \text{Exp}(\mu(1-p)), \quad E(w) = \frac{1}{\mu(1-p)} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$E(w) = E(w_q) + \frac{1}{\mu}, \quad E(w_q) = \frac{p}{\mu(1-p)}, \quad L = \lambda E(w), \quad L_q = \lambda E(w_q)$$

(5) χρόνος συνεχής απασχόλησης υπαλλήλου

$$E(t) = -\frac{1}{p} \frac{d\beta(z)}{dz} \Big|_{z=0}$$

(6) ο χρόνος μεταξύ 2 διαδοχικών αναχωρήσεων $u \sim \text{Exp}(\lambda)$

Οι οριακές πιθανότητες στην διαδικασία γεννήσεων-θανάτων:

$$p_n = \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n} p_0, \quad p_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \dots \mu_i} \right)^{-1}$$

M/M/m/k σύστημα

$k-m$ ☐ m υπάλληλοι
 Θέσεις $\vdots$
 αναμονής ☐

(i) Αν $Z(t)$ είναι ο αριθμός των πελάτων στο σύστημα τη χρονική στιγμή t , τότε $\{Z(t), t \geq 0\}$ η στοχαστική διαδικασία γεννήσεων-θανάτων

(ii) η πιθανότητα να συμβεί μια αλλαγή στο διάστημα $(t, t+dt)$ είναι $\lambda dt + o(dt)$ υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχουν κενές θέσεις στο σύστημα ή 0 όταν είναι γεμάτο

$$P_{n,n+1}(dt) = P(Z(t+dt) = n+1 | Z(t) = n) = \begin{cases} \lambda dt + o(dt), & n < k \\ 0, & n = k \end{cases}$$

(iii) η πιθανότητα να τελειώσει μια εξυπηρέτηση στο χρονικό διάστημα $(t, t+dt)$ είναι $\mu dt + o(dt)$ για κάθε πελάτη που εξυπηρετείται τη χρονική στιγμή t . Έτσι, αν i ο αριθμός πελάτων που εξυπηρετούνται τη χρονική στιγμή t η πιθανότητα ένας από αυτούς να τελειώσει στο $t+dt$ είναι $i\mu dt + o(dt)$

$$P_{n,n-1}(dt) = \begin{cases} n\mu dt + o(dt), & n < m \\ m\mu dt + o(dt), & m \leq n < k \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} \lambda, & n < k \\ 0, & n \geq k \end{cases} \quad \mu_n = \begin{cases} n\mu, & n < m \\ m\mu, & m \leq n < k \end{cases}$$

Αν ορίσω: $P_n(t) = P(Z(t) = n | Z(0) = 0)$

Θέλω να βρω τις οριακές: $P_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t)$

$$\text{Έχουμε: } P_n = \frac{\lambda \dots \lambda}{1\mu \ 2\mu \dots m\mu} P_0, \quad n < m = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{P_0}{n!}$$

$$P_n = \frac{\lambda \dots \lambda}{1\mu \ 2\mu \dots m\mu \dots m\mu}, \quad n \geq m = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0}{m! m^{n-m}}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n-m}$

$$P_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_0 \dots \lambda_i}{\mu_1 \dots \mu_i} + \sum_{i=m}^k \frac{\lambda_0 \dots \lambda_i}{\mu_1 \dots \mu_i} \right)^{-1}$$

$$P_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda^i}{i! \mu^i} + \sum_{i=m}^k \frac{\lambda^i}{m! \mu^i m^{i-m}} \right)^{-1}, \quad \tau = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\tau^i}{i!} + \sum_{i=m}^k \frac{\tau^i}{m! m^{i-m}} \right)^{-1} = \left(\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\tau^i}{i!} + \sum_{i=m}^k \frac{\tau^m \tau^{i-m}}{m! m^{i-m}} \right)^{-1}$$

$$\frac{p = \frac{\lambda}{m\mu} \neq 1}{p=1} \left\{ \begin{array}{l} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\tau^i}{i!} + \frac{\tau^m}{m!} \sum_{i=0}^{k-m} p_i \right)^{-1} \\ \left(\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\tau^i}{i!} + \frac{\tau^m}{m!} \sum_{i=0}^{k-m} 1 \right)^{-1} \end{array} \right.$$

$$P_0 = \begin{cases} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\tau^i}{i!} + \frac{\tau^m}{m!} \frac{(1-p^{k-m+1})}{1-p} \right)^{-1}, & p = \frac{\lambda}{m\mu} \neq 1 \\ \left(\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\tau^i}{i!} + \frac{\tau^m}{m!} (k-m+1) \right)^{-1}, & p=1 \end{cases}$$

- Ο μέσος αριθμός πελάτων στο σύστημα:

$$L = \sum_{n=0}^k n \cdot P_n = P_0 \left(\sum_{n=1}^{m-1} \frac{n \tau^n}{n!} + \sum_{n=m}^k \frac{n \tau^n}{m! m^{n-m}} \right)$$

- Θα εμφανιστεί πελάτης στην ουρά όταν καθυστερούν οι υπάλληλοι

$$L_q = \sum_{n=m+1}^k (n-m) P_n = P_0 \sum_{n=m+1}^k (n-m) \frac{\tau^n}{m! m^{n-m}} = \frac{P_0 \cdot m^m}{m!} \sum_{n=m+1}^k (n-m) p^n$$

- ο μέσος χρόνος αναμονής πελάτη στο σύστημα / μέσος αριθμός πελάτων που μπαίνει στο (Σ)

$$E(W) = L$$

$\lambda(1-P_k) \rightarrow$ μέσος ρυθμός αφίξεων

- μέσος αριθμός πελάτων που θα μπει στο (Σ)

$$E(W_q) = \frac{L_q}{\lambda(1-P_k)}$$

M|M|m|∞ σύστημα

Πρέπει $\rho = \frac{\lambda}{m\mu} < 1$ διότι το $k = \infty$

$$P_0 = \left(\frac{\tau^m}{m!(1-p)} + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\tau^i}{i!} \right)^{-1}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{\tau^n}{n!} P_0, & n < m \\ \frac{\tau^n}{m! m^{n-m}} P_0, & m \leq n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{P_0}{m!} m^m \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p^{m+n} = \frac{P_0 m^m \cdot p^{m+1}}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} n p^{n-1} \\ &= \frac{P_0 m^m p^{m+1}}{m!} \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{1-p} \right) = \frac{P_0 m^m p^{m+1}}{m! (1-p)^2} = \frac{P_0 \tau^{m+1}}{m m! (1-p)^2} \end{aligned}$$

$$E(W_q) = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{P_0 \tau^{m+1}}{\lambda m m! (1-p)^2}$$

$$E(w) = E(W_q) + \frac{1}{\mu} \quad \text{Αρα } L = \lambda E(w)$$

M|M|m|m σύστημα

$k = m$

$$P_0 = \left(\sum_{i=0}^m \frac{\tau^i}{i!} \right)^{-1}$$

αν $m \rightarrow \infty$: $\xrightarrow{\Gamma} \underline{M|M|\infty|\infty}$
 $P_0 = e^{-\tau}$

$$P_n = \frac{\tau^n e^{-\tau}}{n!} \left(p = \frac{\lambda}{\mu} \right) \text{ Poisson}$$

$$P_n = \frac{\tau^n}{n!} P_0$$

Ισχύει και για το σύστημα M|G|m|m

$\tau = \lambda b$, $b = E(\text{χρόνος εξυπηρέτησης})$

M|M|1 σύστημα με αποθαρρυνμένους πελάτες

$$q_n = \frac{n}{n+1}, n \geq 0 : \text{με αυτή την π.θ. θα φύγει}$$

$$\lambda_n = \lambda(1 - q_n) = \frac{\lambda}{n+1} : n \text{ πιθανότητα να μπει}$$

$$P_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right)^{-1} = e^{-\lambda/\mu}$$

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{1}{n!} e^{-\lambda/\mu} \sim p\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

M|M|1 με μεταβλητό ρυθμό εξυπηρέτησης

Θεωρούμε ότι η εξυπηρέτηση είναι ανάλογη του μήκους της ουράς

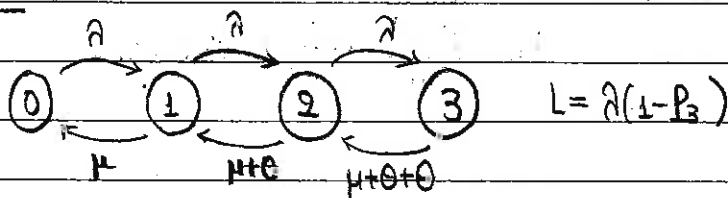
$$\lambda_n = \lambda, \mu_n = n\mu$$

$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right)^{-1}$$

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{1}{n!} e^{-\lambda/\mu} \sim \text{Poisson}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

Έχουμε τρία συστήματα με ίδιες πιθανότητες, αλλά τα συστήματα δεν είναι ίδια (στο τελευταίο δεν χάνει πελάτες)

ΑΣΚΗΣΗ



ΤΡΙΤΗ 31/3/2015 5:

M | M | $+\infty$ | $+\infty$ ΣΥΣΤΗΜΑ

$Z(t)$: αριθμός πελάτων στο (Σ)

$$P_n(t) = P(f(t)=n | f(0)=0) \quad P_0(0)=1$$

$$P_j(0)=0 \quad j \neq 0$$

$$\lambda n = \lambda \quad \mu n = n\mu$$

Εξισώσεις Διαφορών:

$$x^0 \quad \frac{d}{dt} P_0(t) + \lambda P_0(t) = \mu P_1(t)$$

$$x^1 \quad \frac{d}{dt} P_1(t) + (\lambda + \mu) P_1(t) = 2\mu P_2(t) + \lambda P_0(t)$$

$$x^2 \quad \frac{d}{dt} P_2(t) + (\lambda + 2\mu) P_2(t) = 3\mu P_3(t) + \lambda P_1(t)$$

...

$$x^n \quad \frac{d}{dt} P_n(t) + (\lambda + n\mu) P_n(t) = (n+1)\mu P_{n+1}(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

$$P(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(t) x^n, \quad |x| < 1$$

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + \lambda P(x,t) + \mu x \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} = \mu \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + \lambda x P(x,t)$$

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + \mu(x-1) \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} = \lambda(x-1) P(x,t)$$

$$a(x,y) \frac{\partial f}{\partial x} + b(x,y) \frac{\partial f}{\partial y} = \gamma(x,y) f$$

$$\underbrace{\frac{dx}{a(x,y)}}_{\substack{x,y,u \\ u,v}} = \underbrace{\frac{dy}{b(x,y)}}_{\substack{x,y,v \\ v=F(u)}} = \frac{df}{\gamma(x,y)f}$$

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{\mu(x-1)} = \frac{dP}{\lambda(x-1)P}$$

$$\frac{dx}{\mu(x-1)} = dt \Rightarrow (x-1)u e^{\mu t}, \quad u = (x-1)e^{-\mu t}$$

$$\frac{dx}{\mu} = \frac{dp}{\lambda p} \Rightarrow p = ve^{\frac{\lambda}{\mu}x}, v = P(x,t)e^{-\frac{\lambda}{\mu}x}$$

$$v = F(x)$$

$$P(x,t)e^{-\frac{\lambda}{\mu}x} = F((x-1)e^{-\mu t})$$

$$P(x,t) = e^{\frac{\lambda}{\mu}x} F((x-1)e^{-\mu t})$$

$$P(x,0) = e^{\frac{\lambda}{\mu}x} F(x-1)$$

$$F(x-1) = e^{-\frac{\lambda}{\mu}x}$$

$$F(y) = e^{-\frac{\lambda}{\mu}(y+1)}$$

$$P(x,t) = e^{\frac{\lambda}{\mu}x} e^{-\frac{\lambda}{\mu}((x-1)e^{-\mu t} + 1)}$$

$$P(x,t) = e^{\frac{\lambda}{\mu}(x-1)(1-e^{-\mu t})}$$

$$P(x,t) = e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})} e^{\frac{\lambda}{\mu}x(1-e^{-\mu t})}$$

$$= e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})\right)^n}{n!} x^n$$

$$P_n(t) = e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})\right)^n}{n!}$$

$$P_n = \lim_{t \rightarrow \infty} f_n(t) = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n e^{-\frac{\lambda}{\mu}}}{n!} \sim \text{Poisson}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

Έστω $\xi(t)$ ο αριθμός των πελατών στο Σύστημα

$$\xi(t) = n$$

$$\lambda_n = (N-n)\lambda, n=0,1,2, \dots, N \quad \mu_n = \begin{cases} n\mu, & n=1, \dots, K \\ K\mu, & n=K+1, \dots, N \end{cases}$$

$$P_n = \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n} P_0, \quad P_n = \begin{cases} P_0 \binom{N}{n} e^n, & 0 \leq n \leq k \\ P_0 \binom{N}{n} \frac{n!}{k! k^{n-k}} P_0, & k < n \leq N \end{cases}$$

$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^k \binom{N}{n} e^n + \sum_{n=k+1}^N \binom{N}{n} \frac{n!}{k! k^{n-k}} e^n \right)^{-1}$$

$$N \leq k$$

$$P_n = P_0 \binom{N}{n} e^n \quad P_0 = (1+e)^{-N}$$

$$B\left(N, \frac{p}{1+p}\right)$$

$\mathcal{L} \equiv \text{PIMA}$

ΑΣΚΗΣΗ 1^η

M|M|1 ∞ σύστημα

$$\lambda = 24$$

$\mu = 30$: αριθμός εξυπηρέτησης

$$(α) \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{24}{30} < 1$$

$$(β) E_w = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{30 - 24} = \frac{1}{6}$$

$$(γ) P_0 = 1 - \rho$$

(δ) χρόνος αναμονής $w \sim \text{Exp}(\mu(1-\rho)) \equiv \text{Exp}(6)$

$$P(w > \frac{1}{6}) = 1 - P(w < \frac{1}{6}) = 1 - \int_0^{\frac{1}{6}} 6e^{-6t} dt$$

ΑΣΚΗΣΗ 2^η

έχουμε M|M|2 ∞ σύστημα (δύο υπαλλήλους)

$$\lambda = 100$$

$$\mu = 60$$

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu} = \frac{100}{2 \cdot 60} < 1$$

$$(α) 1 - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3), \quad P_n = \begin{cases} \frac{\tau^n P_0}{n!}, & n < m \\ \frac{\tau^n P_0}{m! m^{n-m}}, & m \leq n, \tau = \frac{\lambda}{m} \end{cases} \quad P_0 = \left(\frac{\tau^m}{m! (1-\rho)} + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\tau^i}{i!} \right)^{-1}$$

$$(β) P_0 + \frac{1}{2} P_1$$

ΑΣΚΗΣΗ 3^η

σύστημα $M|M|3|\infty$

$$\lambda = 300, \mu = 182,5, \rho = \frac{\lambda}{m\mu} = \frac{300}{3 \cdot 182,5} < 1$$

ΑΣΚΗΣΗ 4^η

σύστημα $M|M|m|k$

$$m=1, k=4, \mu=30, \lambda=10$$

(α) L, (β) $E(w)$, (γ) $\lambda \cdot P_4$: αυτοί που θα φύγουν $\cdot 15$

ΑΣΚΗΣΗ 5^η

σύστημα $M|M|4|7$

$$\mu=5, \lambda=15$$

(α) L, (β) $\lambda \cdot P_7$

ΑΣΚΗΣΗ 6^η

$M|M|5|8$

$$(1) P_0, (2) \lambda(1-P_8), (3) L, (4) E(w_q) = \frac{L_q}{\lambda(1-P_8)} = 0,3562$$

$$P_8 = 0,021, L_q = 0,1918$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{\tau^n}{n!} P_0, & n < m \\ \frac{\tau^n}{m! m^{n-m}} P_0, & m \leq n < k \end{cases}$$

$$P_0 = \begin{cases} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\tau^i}{i!} + \frac{\tau^m}{m!} \frac{(1-p^{k-m+1})}{1-p} \right)^{-1}, & p \neq 1 \\ \left(\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\tau^i}{i!} + \frac{\tau^m}{m!} (k-m+1) \right)^{-1}, & p = 1 \end{cases}$$

$$p = \frac{\lambda}{m\mu}, \tau = \frac{\lambda}{\mu}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7^η M|M|2|∞

$$\lambda=8, \mu=5$$

M|M|n|∞

$$\lambda=16, \mu=5$$

$E(w), E(w_q)$ για τα δύο συστήματα, $\rho = \frac{\lambda}{m\mu} < 1$

ΑΣΚΗΣΗ 8^η

σύστημα M|M|∞|∞

$$\lambda=12, \mu=1/3$$

$$(i) L = \frac{\lambda}{\mu}$$

ο μέσος όρος: $\underbrace{0.25 L 1000(1-0.2)}_{\text{έχουν πέσει}} + \underbrace{0.75 L 1000(1+0.12)}_{\text{ανέβει}}$

$$(ii) P_0 = e^{-\lambda/\mu}$$

$$P_n = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} e^{-\lambda/\mu}$$

ΑΣΚΗΣΗ 9^η

M|M|∞|∞

$$\lambda=100, \mu=16$$

$$(i) L = \frac{100}{16} \approx 7$$

$$(2) P(X > 7) = 1 - P(X \leq 6), X \sim \text{Pois}(\lambda/\mu)$$

$$(3) P_0 = e^{-\lambda/\mu}$$

ΑΣΚΗΣΗ 10^η

M|M|2|4

$$\lambda=12, \mu=12$$

$$g_2 (1P_1 + 2(P_2 + P_3 + P_4))$$

$$g_3 (1P_3 + 2P_4)$$

$$g_4 (1P_4)$$

ΑΣΚΗΣΗ 11^η

$$\lambda_n = \lambda = 30$$

$$\mu_n = \begin{cases} 30, & n=1,2 \\ 60, & n=3,4,\dots \end{cases}$$

$$P_n = \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n} P_0 \quad P_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} P_2 = \frac{30}{60} P_0 = \frac{1}{2} P_0$$

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 = \frac{30}{30} P_0 \quad P_4 = \frac{\lambda_3}{\mu_4} P_3 = \frac{30}{60} \frac{1}{2} P_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 = P_0$$

$$P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} P_0, n \geq 2$$

$$1 = p_0 + p_1 + \sum_{n=2}^{\infty} p_n = 2p_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} p_0$$

$$= 2p_0 + 2p_0 = 4p_0 \Rightarrow p_0 = 1/4$$

$$\Pi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{2+z+z^2}{z-4z}$$

$$(*) L = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \left. \frac{d\Pi(z)}{dz} \right|_{z=1}$$

$$(3) E(W) = \frac{L}{\lambda}$$

$$(3) L_0 = 1p_2 + 2p_3 + 3p_4 \dots = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)p_n = \sum_{n=2}^{\infty} n p_n - \sum_{n=2}^{\infty} p_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n p_n - p_1 - (1-p_0-p_1) = L - (1-p_0)$$

TPITH 12/5/2015

ΤΡΙΤΗ 28/4/2016 ΤΕ

$$M^{[X]} | M | 1 | \infty \quad (M | E_r | 1 | \infty, M^{[Y]} | M | 1 | \infty)$$

$$X \sim g_i = P(X=i), \sum g_i = 1, i=1,2,$$

Ορίζω $Z(t)$: ο αριθμός πελάτων στο σύστημα τη χρονική στιγμή t

$$P_k(t) = P(Z(t)=k | Z(0)=0)$$

$$P_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t)$$

$$P_0(t+dt) = (1-\lambda dt)P_0(t) + \mu dt P_1(t)$$

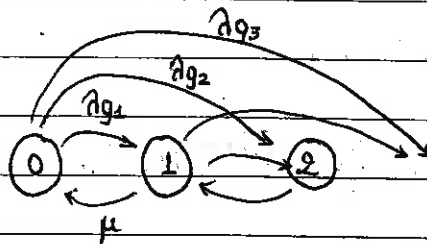
$$P_k(t+dt) = (1-(\lambda+\mu)dt)P_k(t) + \mu P_{k+1}(t)dt + P_0(t)\lambda dt g_k + g_{k-1}\lambda dt P_1(t) + \dots + g_1\lambda dt P_{k-1}(t)$$

Προκύπτει ότι:

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \quad (1)$$

...

$$(\lambda+\mu)P_k = \mu P_{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} P_i \lambda g_{k-i} \quad (2)$$



Για περισσότερες περιπτώσεις:

$$x^0: \lambda P_0 = \mu P_1$$

$$x^1: (\lambda+\mu)P_1 = \mu P_2 + \lambda P_0 g_1$$

$$x^2: (\lambda+\mu)P_2 = \mu P_3 + \lambda P_1 g_2 + \lambda P_0 g_2$$

...

$$x^k: (\lambda+\mu)P_k = \mu P_{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} P_i \lambda g_{k-i}$$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k x^k, |x| < 1$$

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k x^k, |x| < 1$$

$$\lambda P(x) + \mu (P(x) - P_0) = \frac{\mu}{x} (P(x) - P_0) + \lambda g_1 x P(x) + \lambda g_2 x^2 P(x) + \lambda g_3 x^3 P(x) + \dots$$

$$\lambda P(x) + \mu (P(x) - P_0) = \frac{\mu}{x} (P(x) - P_0) + \lambda P(x) G(x)$$

$$P(x) = \frac{\mu P_0(1 - \frac{1}{x})}{\mu + \lambda - \frac{\mu}{x} - \lambda G(x)} = \frac{\mu(1-x)P_0}{\mu + \lambda G(x)x - \mu x - \lambda x} = \frac{\mu(1-x)P_0}{\mu(1-x) - \lambda x(1-G(x))} = \frac{\mu(1-x)(1-p)}{\mu(1-x) - \lambda x(1-G(x))}, \quad p < 1$$

$$1 = P(1), \quad \lim_{x \rightarrow 1} P(x) \stackrel{D'H}{=} \frac{-\mu P_0}{-\mu - \lambda(1-G(1)) + \frac{\lambda G(x)}{dx}} \bigg|_{x=1} = 1$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} G(1) \quad \rho = \frac{\lambda G(1)}{\mu} = \frac{E(\text{χρόνος εξυπηρ.})}{E(\text{χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων})} < 1$$

$$E(\text{χρ. εξυπηρ.}) = \frac{1}{\mu}$$

$$E(\text{χρ. διαδ. αρ.}) = \frac{1}{\lambda G(1)}$$

$$\text{Αν ορίσω } g_i = \begin{cases} 1, & i=r \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \text{ τότε } G(x) = x^r \text{ οπότε } P(x) = \frac{\mu(1-x)(1-p)}{\mu(1-x) - \lambda x(1-x^2)}$$

$$G(1) = \tau x^{\tau-1} = \tau, \quad \rho = \frac{\lambda \tau}{\mu}, \quad M^{[r]} | M | 1 | \infty$$

ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ - ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

$$M^{[r]} | M | 1 | \infty$$

$$P_x(x) = r(1-r)^{x-1}, \quad \omega = (1-r), \quad x=1,2,\dots$$

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-\omega)\omega^{r-1} x^k = x \sum_{k=1}^{\infty} (1-\omega)(\omega x)^{k-1} = \frac{x(1-\omega)}{1-\omega x}$$

$$\rho = \frac{\lambda G(1)}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} \frac{(1-\omega)(1-\omega x) + x(1-\omega)\omega}{(1-\omega x)^2} \bigg|_{x=1} = \frac{\lambda}{\mu(1-\omega)} < 1$$

$$P(x) = \frac{\mu(1-x)(1-p)}{\mu(1-x) - \lambda x(1 - \frac{x(1-\omega)}{1-\omega x})} = \frac{1-p}{1 - \frac{\lambda + \mu\omega}{\mu} x} - \frac{\omega(1-p)x}{1 - \frac{\lambda + \mu\omega}{\mu} x} = (1-p) \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda + \mu\omega}{\mu} \right)^k x^k - \omega(1-p) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda + \mu\omega}{\mu} \right)^k x^{k+1}$$

$$P_0 = 1 - p = 1 - \frac{\lambda}{\mu(1-\omega)}$$

$$P_n = (1-p) \left(\frac{\lambda + \mu\omega}{\mu} \right)^{n-1} \left(\frac{\lambda + \mu\omega}{\mu} - \omega \right) = (1-p) \left(\frac{\lambda + \mu\omega}{\mu} \right)^{n-1} \frac{\lambda}{\mu}, n \geq 1$$

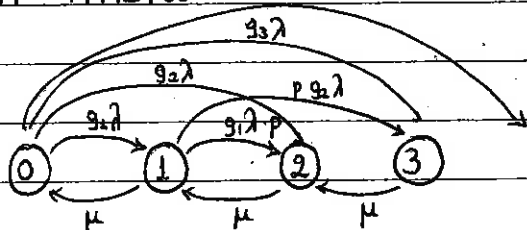
$$g_i = \begin{cases} \alpha, & i=1 \\ 1-\alpha, & i=2 \\ 0, & i \neq 1, 2 \end{cases}$$

$$G(x) = \alpha x + (1-\alpha)x^2$$

$$G(1) = \alpha + 2(1-\alpha) = 2-\alpha$$

$$P(x) = \frac{\mu(1-x)(1 - \frac{\lambda(2-\alpha)}{\mu})}{\mu(1-x) - \lambda x(1 - (\alpha x + (1-\alpha)x^2))} = \frac{C_1}{x_1 - x} + \frac{C_2}{x_2 - x}$$

• $M^{[x]} | M | 1 | \infty$



$$\lambda P_0 = \mu P_1$$

$$(\lambda + \mu) P_n = g_n \lambda P_0 + p \lambda \sum_{k=1}^{n-1} g_{n-k} P_k + \mu P_{n+1}$$

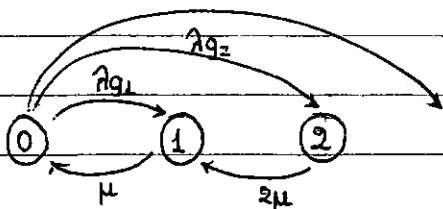
$$(\lambda + \mu) P_0 = \mu P_{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} P_k g_{n-k}$$

$$\lambda P_0 + (\lambda + \mu)(P(z) - P_0) = \lambda P_0 G(z) + p \lambda G(z)(P(z) - P_0) + \frac{\mu}{z}(P(z) - P_0)$$

$$\Pi(z) = \frac{P_0(\lambda q z G(z) - \mu - (\lambda q - \mu)z)}{(\lambda p + \mu)z - p \lambda z G(z) - \mu}, q = 1 - p$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} P(z) = 1 \rightarrow 1 = \frac{P_0(\lambda G(1) + \mu)}{\mu - p \lambda G(1)}, P_0 = \frac{\mu - p \lambda G(1)}{\lambda q G(1) + \mu}$$

$$\bullet M^{[x]} | M | \infty | \infty$$



$$z^0 \quad \lambda P_0 = \mu P_1$$

$$z^1 \quad \lambda P_1 + \mu P_1 = 2\mu P_2 + \lambda P_0$$

...

$$z^n \quad \lambda P_n + n\mu P_n = (n+1)\mu P_{n+1} + \lambda P_0 g_n + \lambda P_1 g_{n-1} + \dots + \lambda P_{n-1} g_1$$

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} n P_n z^n = \mu \sum_{n=1}^{\infty} n P_n z^{n-1} + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} g_n z^n (P_0 + P_1 z + \dots)$$

$$\lambda P(z) + \mu z P'(z) = \mu P'(z) + \lambda G(z) P(z)$$

$$\mu(1-z)P'(z) = \lambda(1-G(z))P(z)$$

$$\left. \begin{aligned} P(z) &= c e^{\int_0^z \frac{\lambda}{\mu} \frac{1-G(x)}{1-x} dx} \\ P(1) &= 1 \Rightarrow c = e^{-\frac{\lambda}{\mu} \int_0^1 \frac{1-G(x)}{1-x} dx} \end{aligned} \right\} P(z) = e^{-\frac{\lambda}{\mu} \int_z^1 \frac{1-G(x)}{1-x} dx}$$

Από αυτό το (5) μπορούμε να πάρουμε $M | M | \infty | \infty$;

$$\text{Ορίσω } g_i = \begin{cases} 1, & i=1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$G(x) = x$$

$$P(z) = e^{-\frac{\lambda}{\mu} \int_z^1 \frac{1-x}{1-x} dx} = e^{-\frac{\lambda}{\mu} (1-z)} = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} e^{\frac{\lambda z}{\mu}} = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda z}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}$$

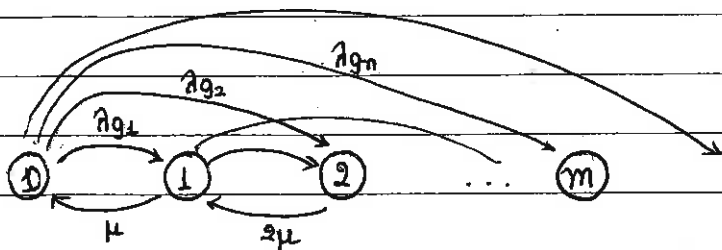
$$P_n = \frac{e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \quad \text{Poisson} \sim \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

ΕΞΙΣΟΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑ $M^{(r)} | M | m | m$

Θα βρεθούν με τις εξής προϋποθέσεις

- (1) Εξυπηρετούνται τόσα μέλη από κάθε ομάδα όσοι είναι και οι ελεύθεροι υπαλλήλοι
- (2) Ολοκληρώνει η ομάδα χάνεται όταν ένα τουλάχιστον μέλος της δεν εξυπηρετείται με g_i πιθανότητα

$$\text{Έχουμε } G_n = \sum_{j=1}^n g_j, \quad \bar{G}_n = \sum_{j=n}^{\infty} g_j$$



$$(1) P_0 \lambda = P_1 \mu$$

$$P_i (\lambda + \mu) = P_0 \lambda g_i + \mu P_{i-1}$$

...

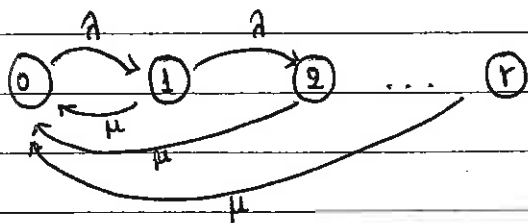
$$P_n (\lambda + \mu) = P_0 \lambda g_n + P_1 \lambda g_{n-1} + \dots + P_{n-1} \lambda g_1 + (n+1) \mu P_{n+1}, \quad n \leq m-1$$

$$P_m \mu = P_0 \lambda \bar{G}_m + P_1 \lambda \bar{G}_{m-1} + \dots + P_{m-1} \lambda g_1$$

(2) [ΑΣΚΗΣΗ]

ΑΣΚΗΣΗ Έχουμε ένα σύστημα $M^{(r)} | M | 1 | \infty$ και κάθε ομάδα αποτελείται από δύο πελάτες. Να βρεθεί ο γενικός τύπος από το P_n για $\lambda=1$ και $\mu=6$

- Έστω $M | M^{(r)} | 1 | \infty$ ο υπαλλήλος ξεκινά όταν οι πελάτες χάνονται r (τροποποίηση)



$$x^* \quad \lambda P_0 = \mu (P_1 + \dots + P_r)$$

$$\text{γεννήτρια } P(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n x^n, \quad |x| < 1$$

$$x^1 \quad \lambda P_1 + \mu P_1 = \mu P_{r+1} + \lambda P_0$$

...

$$x^k \quad \lambda P_k + \mu P_k = \mu P_{k+r} + \lambda P_{k-1}$$

$$\lambda P(x) + \mu (P(x) - P_0) = \mu \sum_{i=1}^r P_i + \mu \left(P(x) - \sum_{i=0}^r P_i x^i \right) + \lambda P(x)$$

$$P(x) = \frac{\mu \sum_{i=0}^{r-1} P_i (x^i - x^r)}{\lambda x^{r+1} - (\lambda + \mu) x^r + \mu} = \frac{\sum_{i=0}^{r-1} P_i (x^i - x^r)}{\frac{\lambda}{\mu} x^{r+1} - \left(\frac{\lambda}{\mu} + 1 \right) x^r + 1} = \frac{\sum_{i=0}^{r-1} P_i (x^i - x^r)}{r p x^{r+1} - (1 + r p) x^r + 1}, \quad p = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\frac{r p x^{r+1} - (1 + r p) x^r + 1}{(1-x) \left(1 - \frac{x}{x_0} \right)} = N \frac{\sum_{i=0}^{r-1} P_i (x^i - x^r)}{1-x}$$

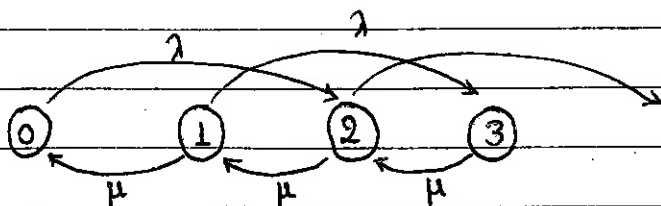
$$\frac{\sum_{i=0}^{r-1} P_i (x^i - x^r)}{r p x^{r+1} - (1 + r p) x^r + 1} = \frac{1}{N \left(1 - \frac{x}{x_0} \right)} = P(x)$$

$$P(1) = 1, \quad 1 = \frac{1}{N \left(1 - \frac{1}{x_0} \right)} \Rightarrow N = \frac{1}{1 - \frac{1}{x_0}}$$

$$P(x) = \frac{1 - \frac{1}{x_0}}{1 - \frac{x}{x_0}} = \left(1 - \frac{1}{x_0} \right) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{x_0} \right)^n, \quad P_n = \left(1 - \frac{1}{x_0} \right) \frac{1}{x_0^n}$$

ΤΡΙΤΗ 5/4/2015

ΑΣΚΗΣΗ (προηγ. μάθημα)



$$z^0 \quad \lambda P_0 = \mu P_1$$

$$z^1 \quad (\lambda + \mu) P_1 = \mu P_2$$

$$z^n \quad (\lambda + \mu) P_n = \lambda P_{n-2} + \mu P_{n+1}$$

Φαίνω τις αντίστοιχες πιθανογεννήτριες. Επίσης, $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n$

$$\lambda P(z) + \mu(P(z) - P_0) = \lambda z^2 P(z) + \frac{\mu}{z}(P(z) - P_0) \Rightarrow$$

$$P(z) = \frac{\mu P_0}{-\lambda z^2 - \lambda z + \mu}$$

$$((1+\mu)z - \lambda z^3 - \mu)P(z) = \mu P_0(z-1)$$

$$P_0 = \frac{-2\lambda + \mu}{\mu}, \quad 2\lambda < \mu$$

Αντικαθιστώ $\lambda=1, \mu=6$ κι έχω $P(z) = \frac{4}{-z^2 - z + 6} = \frac{4}{(z+3)(2-z)} = \frac{A}{z+3} + \frac{B}{2-z}$ (με $\frac{A}{3-z} + \frac{B}{2-z}$)

το κώνω της μορφής $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n$ και φαίνω $P_n = \frac{4}{15} \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΧΩΡΙΣ ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

ΥΠΕΙΣΕΡΧΟΜΕΝΗΣ ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΗΣ ΑΝΣΙΔΑΣ

$$\{\xi(t) : t \geq 0\}, t_0 < t_1 < t_2 < \dots$$

$$\xi_n : \xi_n = \xi(t_n)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Burke Έστω μια στοχαστική διαδικασία της οποίας τα δειγματικά ίχνη (sample paths) είναι θεμελιώδεις συναρτήσεις με μοναδιαίες αυξομειώσεις. Ας ονομάσουμε $\{t_n : n=1, 2, \dots\}$ τις χρονικές στιγμές αύξησης και $\{\bar{t}_n : n=1, 2, \dots\}$ τις χρονικές στιγμές μείωσης και $\bar{\Pi}_k = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi(\bar{t}_n - 0) = k)$

$$\underline{\Pi}_k = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi(\bar{t}_n + 0) = k)$$

Τότε αν υπάρχει το ένα από τα $\bar{\Pi}_k, \underline{\Pi}_k$ υπάρχει το άλλο είναι ίσα

PASTA (Poisson Arrivals See time Averages)

Έστω $\xi(t)$ στοχαστική διαδικασία που περιγράφει τις καταστάσεις ενός συστήματος εξυπηρέτησης κι έστω $A(t)$ είναι ο αριθμός των πελατών που φτάνουν στο διάστημα $(0, t)$. Αν

- (i) Η $\{A(t), t \geq 0\}$ είναι μια διαδικασία Poisson με πεπερασμένη παράμετρο
- (ii) Για όλα τα $t > 0$ το $\{A(t+u) - A(t), u \geq 0\}$ είναι ανεξάρτητο του $\{f(u) : 0 \leq u \leq t\}$ (δηλαδή μελλοντικές αφίξεις δεν επηρεάζονται από τον αριθμό των πελατών που υπάρχουν στο σύστημα) τότε για κάθε $t \geq 0$ και $u > 0$

$$P(\xi(t-u) \in B) = P(\xi(t-u) \in B | A(t) - A(t-u) \geq 1)$$

για όλα τα σύνολα B για τα οποία οι πιθανότητες ορίζονται

ΣΥΣΤΗΜΑ M/G/1/∞

χρόνος εξυπηρέτησης ε.π.π. $b(t)$ ασκ. $B(t)$

Ορίσω $\{\xi(t) : t \geq 0\}$ στοχ. διαδ. που μετρά τον αρ. πελατών στο σύστημα

$t_1, t_2, \dots$ ^{διαδοχ.} : (χρονικές στιγμές κατά τις οποίες τελειώνει η εξυπηρέτηση του 1^{ου}, 2^{ου} κτλ. πελ.)

ξ_i : αριθμός πελατών στο σύστημα μετά το τέλος της i -οστής εξυπηρέτησης

$\{\xi_n, n=1, 2, \dots\}$

$$\xi_{n+1} = \begin{cases} \xi_n - 1 + A_{n+1}, & \xi_n \geq 1 \\ A_{n+1}, & \xi_n = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} A_{n+1} : \text{αριθμός πελατών που φτάνουν} \\ \text{στο σύστημα στη διάρκεια } n+1 \\ \text{χρόνου εξυπηρέτησης} \end{array}$$

Ορίσω Π_n : η πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα μετά το τέλος της n -εξυπηρέτησης

$$P = \{P_{ij}\}$$

$$P_{ij} = P(\xi_{n+1} = j | \xi_n = i)$$

$$k_n = P(n \text{ αφίξεις κατά τη διάρκεια του χρόνου εξυπηρέτησης})$$

$$k_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} dB(t) \quad (\text{ОСР. ОЛ. ПИО})$$

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \dots \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \dots \\ 0 & k_0 & k_1 & k_2 & \dots \\ 0 & 0 & k_0 & k_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots) = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots) P$$

$$z^0 \pi_0 = \pi_0 k_0 + \pi_1 k_0$$

$$z^1 \pi_1 = \pi_0 k_1 + \pi_1 k_1 + \pi_2 k_0$$

$$z^2 \pi_2 = \pi_0 k_2 + \pi_1 k_2 + \pi_2 k_0 + \pi_3 k_1$$

$$\pi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \pi_n z^n, \quad k(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} k_n z^n, \quad |z| < 1$$

$$\pi(z) = \pi_0 k(z) + \pi_1 k(z) + \pi_2 z k(z) + \pi_3 z^2 k(z) + \dots$$

$$\pi(z) = \pi_0 k(z) + \frac{k(z)}{z} (\pi_1 z + \pi_2 z^2 + \pi_3 z^3 + \dots)$$

$$\pi(z) = \pi_0 k(z) + \frac{k(z)}{z} (\pi(z) - \pi_0)$$

$$\pi(z) = \frac{\pi_0 k(z) (1 - \frac{1}{z})}{1 - \frac{k(z)}{z}}$$

$$\pi(z) = \frac{\pi_0 (1-z) k(z)}{k(z) - z}$$

Найти формулу для $k(z)$:

$$k(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} k_i z^i = \sum_{i=0}^{+\infty} z^i \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^i e^{-\lambda t}}{i!} b(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{\lambda z t} e^{-\lambda t} b(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda - \lambda z)t} b(t) dt = b(\lambda - \lambda z)$$

$$|z| < 1$$

$$b(t) \xrightarrow{L} B(z)$$

$$\Pi(z) = \frac{\Pi_0(1-z)B(\lambda-\lambda z)}{B(\lambda-\lambda z)-z} \quad (\text{DeH})$$

$$1 - \Pi(1) = \frac{-\Pi_0 B(0)}{-\lambda \left. \frac{dB(\lambda-\lambda z)}{dz} \right|_{z=1}} = -\frac{\Pi_0}{\lambda E(\epsilon_{\text{Σπ.}}) - 1} \Rightarrow \Pi_0 = 1 - \lambda E(\epsilon_{\text{Σπ.}})$$

$$\text{Ορίσω } \rho = \frac{E(\epsilon_{\text{Σπ.}})}{E(\text{χρ. διαδ. αφδ})} = \frac{E(\epsilon_{\text{Σπ.}})}{1/\lambda} = \lambda E(\epsilon_{\text{Σπ.}})$$

$$\Pi(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)B(\lambda-\lambda z)}{B(\lambda-\lambda z)-z}$$

$$\left. \frac{d\Pi(z)}{dz} \right|_{z=1} = L_0 \quad \text{Pollaczek-Khintchine}$$

$$L_0 = \sum_{n=0}^{\infty} n \Pi_n = \left. \frac{d}{dz} \Pi(z) \right|_{z=1}$$

$$L_0 = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma_B^2}{2(1-\rho)} \quad \text{διακύμανση του χρόνου εξυπηρέτησης}$$

Εφαρμογή στο M/M/1 σύστημα

$$b(t) = \mu e^{-\mu t} \xrightarrow{L} \frac{\mu}{z+\mu} \quad \left(\int_0^{\infty} e^{-zt} \mu e^{-\mu t} dt \right)$$

$$\Pi(z) = \frac{(1-\rho)(1-z) \frac{\mu}{\lambda-\lambda z+\mu}}{\frac{\mu}{\lambda-\lambda z+\mu} - z} = \frac{\mu(1-\rho)(1-z)}{\lambda z^2 - (\lambda+\mu)z + \mu}$$

ρίζες παρονομαστή $\frac{\lambda+\mu \pm \sqrt{(\lambda+\mu)^2 - 4\lambda\mu}}{2\lambda}$ $\nearrow 1 \quad (B(z))$
 $\searrow \mu/\lambda$

$$\Pi(z) = \frac{\mu(1-\rho)(1-z)}{\lambda(1-z)(\frac{\mu}{\lambda} - z)} = \frac{\mu(1-\rho)}{\mu - \lambda z} = \frac{1-\rho}{1 - \frac{\lambda}{\mu} z} = (1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} (\rho z)^n$$

ανάλυση του χρόνου αναμονής για το M/G/1 σύστημα

$w(t)$ σ.π.π. του χρόνου αναμονής του τυχαίου πελάτη στο σύστημα

$w(t)$ α.σ.κ.

$w^*(z)$ Laplace μετασχηματισμός της $w(t)$

FGFS

$$P_n (= P_n) \quad \left(w(t) \xrightarrow{L} w^*(z) \right)$$

$$P_n = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} dw(t)$$

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dw(t) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t(1-z)} w(t) dt = w^*(\lambda - \lambda z)$$

$$P(z) = w^*(\lambda - \lambda z)$$

$$w^*(\lambda - \lambda z) = \frac{(1-z)(1-\rho)\theta(\lambda - \lambda z)}{\theta(\lambda - \lambda z) - z}$$

$$w^*(x) = \frac{(1 - 1 + \frac{x}{\lambda})(1-\rho)\theta(x)}{\theta(x) - 1 + \frac{x}{\lambda}}$$

$$w^*(x) = \frac{(1-\rho)x\theta(x)}{\lambda\theta(x) - \lambda + x}$$

$$\frac{d^k}{dz^k} P(z) = (-\lambda)^k \frac{d^k}{du^k} w^*(u) \Big|_{u=\lambda-\lambda z} = (-\lambda)^k \frac{d^k}{du^k} \int_0^{\infty} e^{-ut} w(t) dt \Big|_{u=\lambda-\lambda z}$$

$$= (-\lambda)^k \int_0^{\infty} (-1)^k t^k e^{-ut} w(t) dt \Big|_{u=\lambda-\lambda z}$$

$$L_k = \frac{d^k}{dz^k} P(z) \Big|_{z=1} = \lambda^k \int_0^{\infty} t^k w(t) dt = \lambda^k \bar{w}_k$$

$$E(w) = \bar{w}_1 = \frac{\lambda b_2}{2(1-\rho)} + E(\text{χρόνος εξυπηρ.}), \quad b_2: \text{η δεύτερη ροπή περι το μηδέν του χρόνου εξυπηρέτησης}$$

$$b_2 = E(T^2), \quad T: \text{χρόνος εξυπ.}$$

$$b_1 = E(T)$$

M|M|1|∞

$$W^*(\lambda) = \frac{(1-p)\lambda \frac{\mu}{\lambda+\mu}}{\lambda - \lambda + \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}} - \frac{\mu(1-p)}{z+\mu(1-p)}$$

ΤΡΙΤΗ 12/5/2015

M|G|1 ΣΥΣΤΗΜΑ (ο πελάτης επαναλαμβάνει την εξυπηρέτηση)

$$0 < q < 1$$

$$Y_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$

N: πλήθος διαιδοχικών επαναλήψεων της εξυπηρέτησης

$N \sim \text{Geo}(1-q)$: επαναλαμβάνει μέχρι την πρώτη επιτυχία

$$\Pi(z) = \frac{(1-p)(1-z)\theta^*(\lambda-\lambda z)}{\theta^*(\lambda-\lambda z) - z} \quad \theta^*: \text{μετ/μος Laplace}$$

Αν $\{X_N\}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με μετ/μο Laplace

$F_X^*(z)$ και N μια μη αρνητική ακέραια τ.μ. ανεξάρτητη των τ.μ. $\{X_N\}$ με

πιθανογεννήτρια $P_N(s)$. Τότε ο μετ/μος Laplace της $Y_N = X_1 + \dots + X_N$

δίνεται ως $F_{Y_N}^*(z) = P_N(F_X^*(z))$

$$\begin{array}{l} \text{ορίσμος} \\ \text{πιθανογενν.} \\ \text{γεωμετρικής} \end{array} \quad \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} (1-q) z^k \quad \longrightarrow \quad \frac{(1-q)z}{1-qz}$$

$$\Pi(z) = \frac{(1-p)(1-z) \frac{(1-q)\theta^*(\lambda-\lambda z)}{1-q\theta^*(\lambda-\lambda z)}}{1-q\theta^*(\lambda-\lambda z)} - z$$

ΜΙΓΔΙ ΟΥΡΑ ΜΕ ΟΜΑΔΙΚΕΣ ΑΦΙΞΕΙΣ

τα μεγέθη των ομάδων είναι ανεξ. και ισον. τ.μ με συνάρτηση πιθανότητας g_k , $k \in \mathbb{N}$ και πεπερασμένη μέση τμή $G(z)$: πιθανογεννήτρια

$$y = N_1 + N_2 + \dots + N_k$$

k : αριθμός των αφίξεων των ομάδων

N_i : τα μεγέθη των ομάδων

N_i και k ανεξάρτητα

$$E(z^y | k=k, \chi=x) = E(z^{N_1 + \dots + N_k}) = \prod_{i=1}^k E(z^{N_i}) = G^k(z)$$

$$E(z^y | \chi=x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{G^k(z) e^{-\lambda x} (\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda x (1-G(z))}$$

$$K(z) = E(z^y) = \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda - \lambda G(z))x} \theta(x) dx = \theta^*(\lambda - \lambda G(z))$$

Πιθανοχ. για τον αριθμό πελάτων στο σύστημα

$$\xi_{n+1} = \begin{cases} N-1 + \gamma_{n+1} & \text{αν } \xi_n = 0 \\ \xi_n - 1 + \gamma_{n+1} & \text{αν } \xi_n \neq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \xi_n: \text{ο αριθμός πελάτων} \\ \text{στον } n: \text{αναχώρηση} \end{array}$$

$$\Pi(z) = E(z^{\xi_{n+1}}) = E(z^{-1 + \Delta_n + \gamma_{n+1}}) \text{ με } \Delta_n = \begin{cases} N, & \text{αν } \xi_n = 0 \\ \xi_n, & \text{αν } \xi_n > 0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{z} E(z^{\Delta_n}) E(z^{\gamma_{n+1}}) = \frac{1}{z} E(z^{\Delta_n}) \theta^*(\lambda - \lambda G(z))$$

$$E(z^{\Delta_n}) = \Pi_0 E(z^N) + \Pi(z) - \Pi_0 = \Pi_0 G(z) + \Pi(z) - \Pi_0$$

$$\Pi(z) = \frac{1}{z} \theta^*(\lambda - \lambda G(z)) (\Pi_0 G(z) + \Pi(z) - \Pi_0)$$

$$\Pi(z) = \frac{\theta^*(\lambda - \lambda G(z)) \Pi_0 (1 - G(z))}{\theta^*(\lambda - \lambda G(z)) - z}$$

Ισχύουν:

$$\Pi(1) = 1 \text{ και } m = G(1)$$

$$\Pi(z) = \frac{b^*(\lambda - \lambda G(z))(1-p)(1-G(z))}{m(b^*(\lambda - \lambda G(z)) - z)}$$

$$\rho = \lambda b G(1) = \lambda b m < 1$$

$b = E(\text{χρόνος εξυπηρέτησης})$

$$P = \begin{pmatrix} \bar{k}_0 & \bar{k}_1 & \bar{k}_2 & \dots \\ k_0 & k_1 & k_2 & \dots \\ 0 & k_0 & k_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \leftarrow \begin{aligned} \bar{k}_i &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda x} (\lambda x)^i}{i!} dB_0(x) \\ k_i &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda x} (\lambda x)^i}{i!} dB(x) \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΛΛΑΔΙΟ II

ΑΣΚΗΣΗ 1^η

Θεωρούμε ότι οι αφίξεις είναι Poisson. Άρα M/G/1 σύστημα

Πρέπει να βρω τη μέση τιμή για να το προσαρμόσω ~~5/11~~

- $0.4x_1 + 0.3x_2 + 0.1x_4 + 0.2x_3 = 2$ ημέρες για τη μέση τιμή. $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i x_i$, $\mu = 11$ κατοι μέσο όρο 11 αδειες το μήνα

$\lambda = 10$ (μπορεί να τον εξυπηρετήσει)

$$L = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma^2}{2(1-\rho)}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{11} < 1 \text{ άρα ανταπεξέρχεται}$$

$$= 6.827$$

$$\sigma^2 = 1.2$$

$$\bullet W = \frac{L}{\lambda}$$

$$\frac{1}{N-1} \sum (x_i - \bar{x}_N)^2$$

↓
ή με $\frac{1}{N} (\sum x_i^2)$

ΑΣΚΗΣΗ 2^η

<u>αριθμός εκφορτ.</u>	<u>χρον. εκφ.</u>	<u>αριθμός φορτηγών που εκφ. λωρα</u>
1	2 ώρες	0.5 μισό φορτηγό
2	1	1
3		1.5

συνολικό κόστος : 50N

160 L_q (πόσα φορτηγά καθυστερεί)

$$\lambda = 2, \mu = \frac{N}{2} =$$

$\lambda < \mu$ (για να έχω 160p.) $\Rightarrow N > 4$, ψάχνω για αρ. εκφορτωτών > 4

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

<u>N</u>	<u>160 L_q</u>	<u>50N</u>	<u>ΣΥΝΟΛ. ΚΟΣΤΟΣ</u>
5	512	250	762
6	214.4	300	514.4
(7)	121.6	350	471.6
8	80	400	480
9	57.6	450	507.6

$$f(N) = \frac{\lambda^2}{\frac{N}{2}(\frac{N}{2} - \lambda)} 160 + 50N, \quad N > 4 \quad (\text{το ελέγχουμε})$$

↓
ΣΥΝΟΛΙΚΟ

ΚΟΣΤΟΣ

και βρίσκω το ελάχιστο (βρίσκω 1^η παρ. και βρίσκω τη ρίζα)

ΑΣΚΗΣΗ 3^η

M/M/1 ΣΥΣΤΗΜΑ

Το συνολικό κόστος για το φωτοτυπικό $i \Rightarrow 24Gi + 80Li$

κόστος καθυστερούμενης παραδόσης

Μοντέλο i	λ_i	μ_i	Li
1	4 (εργ/ημέρα)	$10000:30/60 \approx 5.56$ αρα $\frac{24}{5.56} = 4.32 = \mu_1$	12.5
2	4	5.18	3.39
3	4	7.2 $\mu > \lambda$	1.25
4	4	9.5 αρα όλο μας κάνουν	0.73

$$Li = \frac{\rho_i}{1 - \rho_i} \quad (\text{μέγος αρ. εργασιών που περιμένουν στο σύστημα})$$

Συνολικό κόστος

1360

751

676

706

παιρνουμε το 3^ο

$$\left(\begin{array}{l} 24 \times 15 + 80 \times 12.5 \\ - 24 \times 20 \end{array} \right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 4^η

σύστημα M/M/m/∞

$$\lambda = 17.5$$

$$\mu = 10$$

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu} < 1 \quad (\text{θέλουμε τουλάχιστον 2 υπαλλήλους}) \quad \text{αρα } m \geq 2$$

$$L = 50 + 12$$

m	L	ΕΥΡΕΤΗ ΚΟΣΤΟΣ			
2	7.467	397.35	6	1.754	159.70
3	2.217	146.85			
4	1.842	140.10			
5	1.769	148.45			

$$L = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\tau^{m+1}}{m m! (1-p)^2} P_0, \quad \tau = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_0 = \left(\frac{\tau^m}{m! (1-p)} + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\tau^i}{i!} \right)^{-1}$$

$$L = \lambda E(W)$$

$$E(W) = E(W_0) + \frac{1}{\mu}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5η

ΕΥΡΕΤΗ ΚΟΣΤΟΣ : $TG(\mu) = c\mu + h \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$

$$(1) \frac{dTG(\mu)}{d\mu} = c - \frac{h\lambda}{(\mu - \lambda)^2} = 0$$

$$(2) \mu^* = \lambda + \sqrt{\frac{h\lambda}{c}}$$

$$(3) 1 - P_0 = 1 - (1-p) = p$$

$$c\mu p + 0 \cdot c\mu = c\mu \frac{\lambda}{\mu} = c\lambda$$

$$TG(\mu) = c\lambda + \frac{h\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$\frac{dTG(\mu)}{d\mu} = -\frac{h\lambda}{(\mu - \lambda)^2} < 0 \quad (\text{ΚΑΝΕΙ ΤΟ } \mu \text{ ΜΕΓΑΛΥΟ)}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6^η

πρέπει ($\lambda p < \mu$)

ΕΣΘΑΑ

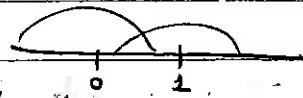
$$U(p) = \lambda p R - \frac{\lambda p c}{\mu - \lambda p} = \lambda p \left(R - \frac{c}{\mu - \lambda p} \right)$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{Lc}$

$$\frac{dU(p)}{dp} = \lambda R - \frac{c \lambda \mu}{(\mu - \lambda p)^2}$$

$$\frac{d^2U(p)}{dp^2} = - \frac{2 \lambda^2 \mu}{(\mu - \lambda p)^3} < 0, \quad 0 \leq p \leq 1$$

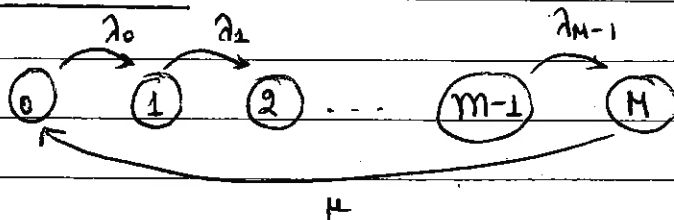
$$(1) U'(0) < 0, \quad p=0, \quad U'(0) < 0 \Rightarrow R < \frac{c}{\mu}$$



$$(2) U'(p) = 0, \quad p^* = \frac{\mu}{\lambda} - \sqrt{\frac{c\mu}{R\lambda^2}}$$

$$(3) U'(1) > 0 \Rightarrow p=1, \quad R \geq \frac{c\mu}{(\mu - \lambda)^2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7^η



ΟΡΙΑΚΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

$$P_0 \lambda_0 = P_M \mu$$

$$P_1 \lambda_1 = P_0 \lambda_0$$

$$P_2 \lambda_2 = P_1 \lambda_1$$

...

$$P_M \mu = P_{M-1} \lambda_{M-1}$$

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{M-n}$$



$$P_M = \frac{\lambda_0}{\mu} P_0 = \frac{\lambda}{M\mu} P_0 = \frac{\rho}{M} P_0$$

$$P_1 = \frac{\lambda_0 P_0}{\lambda_1} = \frac{\lambda/M}{\lambda/M-1} P_0 = \frac{M-1}{M} P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} P_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\lambda_0}{\lambda_1} P_0 = \frac{M-2}{M} P_0$$

$$P_n = \begin{cases} P_0 \frac{M-n}{M}, & n=0, \dots, M-1 \\ P_0 \frac{\rho}{M}, & n=M \end{cases}$$

$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{M-1} \frac{M-n}{M} + \frac{\rho}{M} \right)^{-1} = \frac{2M}{M^2 + M + 2\rho} \quad ?$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{2(M-n)}{M^2 + M + 2\rho}, & n=0, \dots, M-1 \\ \frac{2\rho}{M^2 + M + 2\rho}, & n=M \end{cases}$$

$$L = \sum_{n=0}^M n P_n = \frac{2}{M^2 + M + 2\rho} \left(\sum_{n=0}^{M-1} n(M-n) + M\rho \right) = \frac{M^3 - M^2 + 6\rho M}{3M^2 + 3M + 6\rho}$$

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)$$

λP_M	$R\lambda(1-P_M)$	(ΕΣΟΔΑ)
$\downarrow$	cP_M	(ΚΟΣΤΟΣ)

πράξεις
που πραγματοποιούνται

$$f(M) = R\lambda(1-P_M) - cP_M \quad (\text{Θα το ελαχιστ. ως προς } M)$$

$$f'(M) > 0$$

όσο πιο μεγάλο M τόσο πιο πολλά κέρδη έχουμε

ΑΣΚΗΣΗ 1^η
M/M/1 ∞

(1) L_q

(2) $s+1$ εξυπηρετ. $P_0 + P_1 + \dots + P_{s+1} \leq 0.1$, $(1-p) + p(1-p) + \dots$

(3) Δεν M/M/1 (2) έχουμε M/G/1

$$\text{Αρα } L = p + \frac{p^2 + 2\sigma^2 p}{2(1-p)}$$

$$p = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\begin{aligned} \text{Το σύστημα με } L_q, E(W) &= E(W_q) + \frac{L}{\mu} \\ \lambda E(W) &= \lambda E(W_q) + \lambda \frac{L}{\mu} \end{aligned}$$

2^η M/M/1 σύστημα

$$\lambda = 45, \mu = 12 \text{ και } \frac{45}{12} < 1 \Rightarrow m = \dots 4$$

$$E(W_q) \leq \frac{5}{60} \frac{L_q}{\lambda}$$

3^η M/M/30/40, $\lambda = 20, \mu = 1$

(1) P_{40}

(2) $P_{30} + P_{31} + \dots + P_{39}$

(3) $L - L_q$

(4) $\lambda B P(n \leq 29)$

4^η

(A)

(B)

M/M/1 σύστημα

$$\lambda = 3, \mu = 4$$

$$\lambda = 3, \mu = 6$$

τα αναγν
στην ώρα

$$8 + \frac{L}{16} = 48$$

$$10 + \frac{L}{16} = 26$$

αριθμός

μηχανών

στην εξυπ.

ASK 52

M/M/2/4

$$\lambda = 10, \mu = 12$$

$$90 (1 \cdot P_1 + 2 (P_2 + P_3 + P_4))$$

$$E_{SOA} 400 (1 \cdot P_3 + 2 P_4)$$

$$E_{SOAA} : 20 \lambda (1 - P_4)$$

$$E_{SOAA} - E_{SOA}$$

ASK 62

M/M/1/50, $\lambda = 10, \mu = 12$

$$(1) P_{50}$$

$$(2) P_0 + P_1 + \dots + P_{47}$$

ASK 74

M/M/4/100

$$\lambda = 100 = 4 \cdot 25$$

$$\mu =$$

$$(1) (1 - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3)) = P_4$$

$$(2) E(W)$$

$$(3) L_q$$

$$(4) 4 - (L - L_q)$$

↓
KESQ
n2180
72461/2021

$\delta \approx \Delta K$

$M/M/3/\infty$

$$P_0 + P_1 + \dots + \underbrace{P_{s+3}}_x$$

$$\geq 0.99$$

